MATHEMATIK 8

Österreichischer Lehrplan

Kompetent AUFSTEIGEN ...

- Maturavorbereitung
- Grundkompetenzen erarbeiten und wiederholen

8. Klasse AHS

Günther Wagner / Helga Wagner

G&G

Mathematik 8

Kompetent AUFSTEIGEN ...

8. Klasse AHS

Günther Wagner / Helga Wagner

G&G

Symbolerklärung

1 Übungsaufgabe:
Die meisten Übungen kannst du im Buch erledigen, für einige Aufgaben ist es aber ratsam, wenn du dir ein Übungsheft anlegst.

In einem solchen Kästchen findest du **Musterbeispiele** zum jeweiligen Thema.

Wichtiger Merksatz! Guter Tipp! Merke dir das gut!

Dem Buch ist ein Lösungsheft zur Selbstkontrolle beigelegt.

www.ggverlag.at

ISBN 978-3-7074-2115-6

In der aktuell gültigen Rechtschreibung

1. Auflage 2017
Satz: Günther Wagner
Printed by Litotipografia Alcione, Lavis-Trento, über Agentur Dalvit, D-85521 Ottobrunn

© 2015 G&G Verlagsgesellschaft mbH, Wien
Alle Rechte vorbehalten. Jede Art der Vervielfältigung, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe sowie der Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme, gesetzlich verboten. Aus Umweltschutzgründen wurde dieses Buch auf chlorfrei gebleichtem Papier gedruckt.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Du hältst ein Übungsbuch in der Hand, das dir helfen soll, auf einfache Art und Weise die 8. Klasse in Mathematik positiv abzuschließen und daran anschließend die Matura zu bestehen.

Mit „Kompetent Aufsteigen Mathematik 8“ ist das Lernen ganz leicht!

Im ersten Teil des Buches wird der wichtigste Stoff der 8. Klasse zusammengefasst. Jedes Kapitel wird von einem Theorieteil mit übersichtlichen Erklärungen und einfachen Merksätzen eingeleitet. Die anschließenden Übungen in unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden helfen dir, den Lernstoff zu wiederholen, zu festigen und deine Noten zu verbessern.
Als Vorbereitung auf die standardisierte und kompetenzorientierte Reifeprüfung (Zentralmatura) werden am Ende jeden Kapitels Fragen und Übungen zur Grundkompetenz gestellt. Diese berücksichtigen vor allem die neuen Prüfungsformate (z. B. Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Argumentieren, Begründen) und festigen die Grundkompetenz im Hinblick auf die zentrale Reifeprüfung in Mathematik.

Das beigelegte Lösungsheft ermöglicht eine einfache Selbstkontrolle.

Im zweiten Teil werden zur Sicherung der Nachhaltigkeit (Lehrplan 8. Semester) die Grundkompetenzen der gesamten Oberstufe – gegliedert nach den vier Inhaltsbereichen AG Algebra und Geometrie, FA Funktionale Abhängigkeiten, AN Analysis und WS Wahrscheinlichkeit und Statistik – wiederholt und dazu einige Beispiele angegeben. Weiters wird durch die Symbole ❺⑥❼⑧ darauf verwiesen, in welchen Klassen die entsprechende Grundkompetenz als Lehrstoff vorkommt.
Zum Beispiel kommt die Grundkompetenz „Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ verständig einsetzen können“ in allen Oberstufenklassen vor. In der 5.Klasse ❺ und in der 7. Klasse ❼ wird diese Grundkompetenz als Lehrstoff durchgenommen.

Lies zur Vorbereitung auf die kompetenzorientierte Reifeprüfung in den Büchern *„Aufsteigen Mathematik 5, 6, 7 und 8“* die entsprechenden Kapitel nach. Du findest dort weitere Beispiele zum Vertiefen und Vernetzen der Grundkompetenzen.

Zusätzliche Aufgaben zur Vorbereitung findest du auch im Band *„Kompetent Aufsteigen Mathematik 8 Matura-Trainer“*.

Viel Erfolg beim Üben mit dem vorliegenden Werk und alles Gute für die bevorstehende Reifeprüfung wünschen dir die Autoren

Helga Wagner Günther Wagner

Inhalt

Integralrechnung

Unter- und Obersumme 6
Näherungsweises Berechnen von Flächeninhalten 6
Das Integral 9
Approximation von Integralen durch eine Summe von Produkten 10
Stammfunktion 11
Stammfunktionen von Summen und Vielfachen von Funktionen 12
Berechnung von Stammfunktionen mit Hilfe von Grundintegralen 13
Berechnung von bestimmten Integralen 16
Verwendung von elektronischen Tools 18
Integrationsmethoden 21
Partielle Integration 21
Substitutionsmethode 23
Sätze über Integrale 24
Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren 25
Zusammenfassung der Eigenschaften des Integrals 26

Anwenden der Integralrechnung

Flächenberechnungen 29
Flächeninhalt von Flächenstücken oberhalb und unterhalb der x-Achse 29
Flächeninhalt von Flächenstücken, die von Kurven begrenzt sind 32
Berechnung von Rauminhalten von Körpern 36
Rauminhalt von Körpern mit gegebener Querschnittsfläche 36
Rauminhalt von Drehkörpern 37
Berechnung der Länge von Kurvenbögen 40
Anwendungen in der Physik 41
Weglängen, Geschwindigkeit, Beschleunigung 41
Berechnung der physikalischen Arbeit 43

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Zufallsvariable 49
Stetige Zufallsvariable 49
Erwartungswert und Varianz einer stetigen Zufallsvariablen 52
Normalverteilung 54
Bestimmung von Werten zur Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung 58
Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten in symmetrischen Intervallen um den Erwartungswert μ 66
Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung 69
Formeln zur Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung 73
γ-Streubereich für die relative Häufigkeit einer binomialverteilten Zufallsvariablen x 75

Schließende Statistik

Begriffe 83
Stichprobe 83
Hypothese 83
Ablehnungsbereich – Annahmebereich 83
Irrtumswahrscheinlichkeit 85
Testen von Hypothesen 86
Fehler beim Testen von Hypothesen 92
Konfidenzintervalle 94

Berechnung des Konfidenzintervalls 94
Näherungsweise Berechnung des Konfidenzintervalls 95
Exakte Berechnung des Konfidenzintervalls 97

Dynamische Systeme

System 103
Darstellungsform von dynamischen Systemen 103
Verbale Beschreibung 103
Ursache-Wirkung-Diagramm (Kausaldiagramm) 104
Flussdiagramm 107
Modellbildung durch Differenzengleichungen 109
Modellbildung durch Differentialgleichungen 111
Diskretes lineares Wachsen und Abnehmen 111
Kontinuierliches lineares Wachsen und Abnehmen 112
Lösung der Differentialgleichung der Form $f'(x) = k$ 112
Kontinuierliches exponentielles Wachsen und Abnehmen 113
Beschränkte Wachstumsmodelle 114

Überblick über den Lehrstoff der Oberstufe im Hinblick auf die Reifeprüfung

AG Algebra und Geometrie 119
AG 1 Grundbegriffe der Algebra 119
AG 2 (Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme 128
AG 3 Vektoren 133
AG 4 Trigonometrie 140

FA Funktionale Abhängigkeiten 143
FA 1 Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften 143
FA 2 Lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$ 149
FA 3 Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b \quad z \in \mathbb{Z}$ oder $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$ 151
FA 4 Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$ 154
FA 5 Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$ 158
FA 6 Sinusfunktion, Cosinusfunktion 161

AN Analysis 166
AN 1 Änderungsmaße 166
AN 2 Regeln für das Differenzieren 168
AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion 170
AN 4 Summation und Integral 174

WS Wahrscheinlichkeit und Statistik 178
WS 1 Beschreibende Statistik 178
WS 2 Wahrscheinlichkeitsberechnung 181
WS 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung(en) 187
WS 4 Schließende/Beurteilende Statistik 189

Tabelle der Standardnormalverteilung 190

Integralrechnung

Die Integralrechnung ist neben der Differentialrechnung der wichtigste Zweig der Analysis. Sie ist aus dem Problem der Flächen- und Volumsberechnung entstanden, aber auch aus der Aufgabenstellung, zum Differenzieren eine Umkehroperation zu finden.

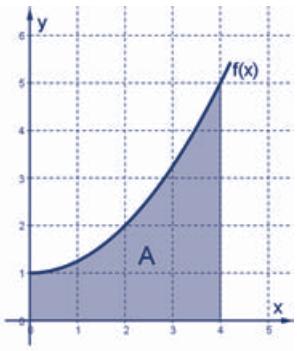
Unter- und Obersumme

In der Unterstufe hast du gelernt, wie man den Flächeninhalt von geometrischen Figuren mit Hilfe von einfachen Formeln errechnet. Zum Beispiel: Flächeninhalt eines Rechtecks $A = a \cdot b$, oder Flächeninhalt eines Kreises $A = r^2 \cdot \pi$

Näherungsweises Berechnen von Flächeninhalten

Um auch den Flächeninhalt von Flächen, die von Kurven begrenzt sind, zu berechnen, kann man so vorgehen:

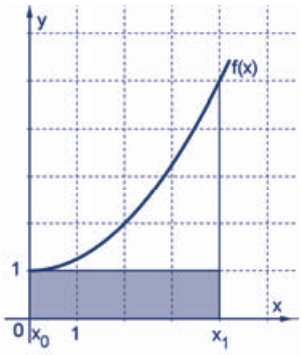
Gib den Flächeninhalt jenes Flächenstücks an, das von der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ und der x-Achse im Intervall $[0; 4]$ begrenzt wird!

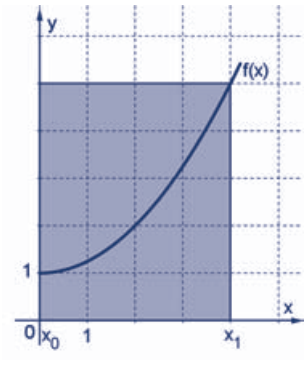


Um den gesuchten Flächeninhalt abzuschätzen, kann man so vorgehen:

1. Näherung:

   Abschätzen des Flächeninhalts durch ein eingeschriebenes bzw. ein umschriebenes Rechteck im gesamten Intervall $[0; 4]$.





Der gesuchte Flächeninhalt A liegt zwischen den Flächeninhalten

des eingeschriebenen Rechtecks: $4 \cdot f(x_0)$ bzw.

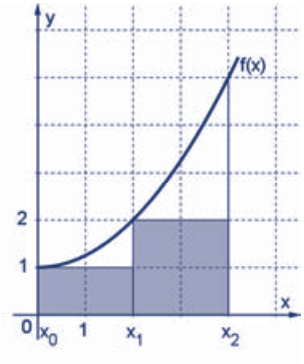
des umschriebenen Rechtecks: $4 \cdot f(x_1)$

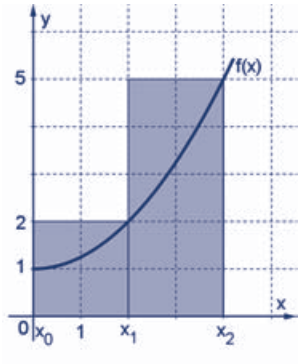
Intervalllänge: $x_1 - x_0$

$$4 \cdot f(0) < A < 4 \cdot f(4)$$
$$4 \cdot 1 < A < 4 \cdot 5$$
$$4 < A < 20$$

2. Näherung:

Das Intervall wird in zwei gleich lange Teilintervalle zerlegt.





Der gesuchte Flächeninhalt A liegt zwischen der Summe der Flächeninhalte der eingeschriebenen Rechtecke bzw. der Summe der Flächeninhalte der umschriebenen Rechtecke.

Intervalllänge: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 2$

$$2 \cdot f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) < A < 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2)$$

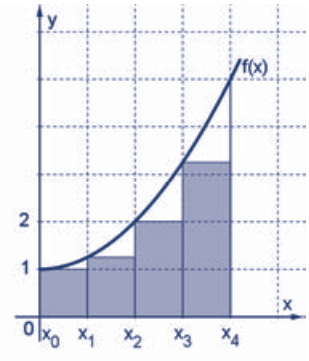
$$2 \cdot f(0) + 2 \cdot f(2) < A < 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f(4)$$

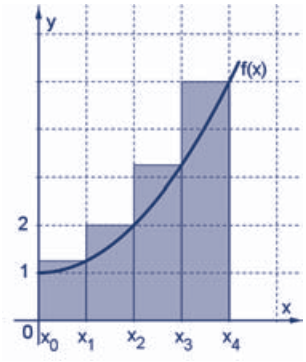
$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 < A < 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5$$

$$6 < A < 14$$

3. Näherung:

Das Intervall wird in vier gleich lange Teilintervalle zerlegt.





Intervalllänge: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = 1$

$$1 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) + 1 \cdot f(x_2) + 1 \cdot f(x_3) < A < 1 \cdot f(x_1) + 1 \cdot f(x_2) + 1 \cdot f(x_3) + 1 \cdot f(x_4)$$

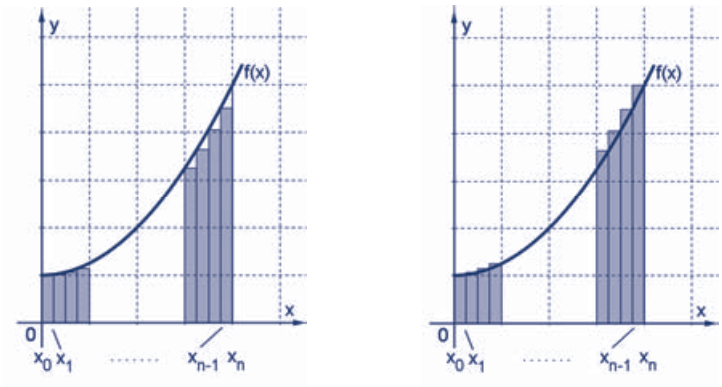
$$1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) < A < 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4)$$

$$1 + 1{,}25 + 2 + 3{,}25 < A < 1{,}25 + 2 + 3{,}25 + 5$$

$$7{,}5 < A < 11{,}5$$

Man erkennt:
Wird die Zerlegung des Intervalls feiner gewählt, so kommen einander die Werte der Summen der Flächeninhalte der eingeschriebenen bzw. umschriebenen Rechtecke näher.

Näherung durch Zerlegung des Intervalls in **n Teilintervalle**:



Intervalllänge: $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$

$$\Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_{n-1}) < A < \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \ldots + \Delta x \cdot f(x_n)$$

$$\underbrace{\Delta x \cdot \left[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right]}_{U_n} < A < \underbrace{\Delta x \cdot \left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right]}_{O_n}$$

Unter- und Obersumme

Einem Flächenstück, das vom Graphen einer Funktion $f(x) \geq 0$ und der x-Achse im Intervall $[a; b]$ festgelegt ist, können Rechtecke eingeschrieben bzw. umgeschrieben werden.

Die Summe der Rechtecksflächen unterhalb der Kurve wird als **Untersumme U_n** bezeichnet.

Die Summe der Rechtecksflächen oberhalb der Kurve wird als **Obersumme O_n** bezeichnet.

Wenn n über alle Grenzen strebt $(n \to \infty)$ und die Untersumme U_n bzw. die Obersumme O_n zum selben Grenzwert konvergieren, dann gilt für den Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f:

$$A = \lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} O_n$$

Beachte:
Wenn du die Untersumme bildest, dann ist die Länge des Rechtecks jeweils der kleinste Funktionswert von f im entsprechenden Teilintervall. Wenn du die Obersumme bildest, dann ist die Länge des Rechtecks jeweils der größte Funktionswert von f im entsprechenden Teilintervall.

Das Integral

Durch den Graphen der stetigen Funktion f und der x-Achse wird im Intervall $[a;b]$ eine Fläche begrenzt, deren Flächeninhalt man mit Hilfe der Unter- bzw. der Obersumme näherungsweise berechnen kann. Man zerlegt das Intervall $[a;b]$ in n Teilintervalle, gibt die Länge der Teilintervalle mit Δx an und bezeichnet in den jeweiligen Teilintervallen die Minimumstellen mit $x_{i;\min}$ bzw. die Maximumstelle mit $x_{i;\max}$.

Dann gilt für die

Untersumme $U_n = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i;\min}\right)$ und für die

Obersumme $O_n = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i;\max}\right)$

Wenn man die Anzahl der Teilintervalle erhöht, also n nach unendlich strebt, so strebt Δx nach 0. Dabei wird der Unterschied zwischen Unter- und Obersumme beliebig klein.
Das lässt vermuten, dass es genau eine Zahl I gibt, sodass $U \le I \le O$ für alle Untersummen U und alle Obersummen O von $[a;b]$ gilt.
Die Zahl I wird in der Mathematik eigens benannt: I ... Integral

Bestimmtes Integral

Ist f eine im Intervall $[a;b]$ stetige Funktion, dann heißt die reelle Zahl I, die zwischen allen Untersummen und allen Obersummen von f in $[a;b]$ liegt, bestimmtes Integral von f in $[a;b]$.

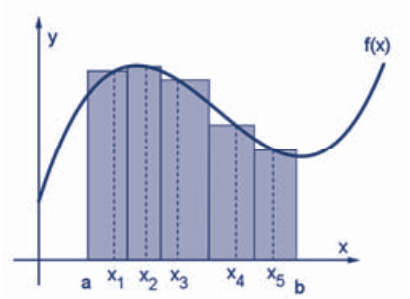
Man schreibt: $I = \int_a^b f$ oder $I = \int_a^b f(x)\,dx$

Beachte:
- Sprechweise: „Integral von f zwischen den Grenzen a und b“
  kurz: „Integral von f von a bis b“
  a heißt untere Grenze, b heißt obere Grenze des Integrals.
- Die Funktion f bzw. der Funktionsterm $f(x)$ wird als Integrand bezeichnet.
- Die Variable x heißt Integrationsvariable.
- Das Berechnen von Integralen heißt integrieren.
- Beim Symbol $\int_a^b f(x)\,dx$ ist im Gegensatz zum Symbol $\int_a^b f$ die Integrationsvariable ersichtlich. Das verdeutlicht, nach welcher Variablen integriert wird.
  Zum Beispiel: $\int_a^b f(t)\,dt$ ... die Funktion f wird in $[a;b]$ nach der Variablen t integriert.

Anmerkung:

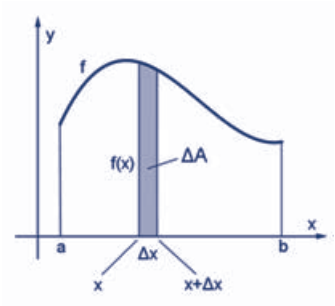
Bei der Abschätzung des bestimmten Integrals I durch Unter- bzw. Obersummen wurden die Höhen der Rechtecke mit der Minimumsstelle bzw. der Maximumsstelle der Teilintervalle angenommen.

Die Höhe kann allerdings auch an jeder beliebigen Stelle x_i des Intervalls angenommen werden (siehe Skizze).
Wenn man sehr viele Rechtecke verwendet und Δx klein genug wählt, ist es egal, wo die Höhe der Rechtecke angenommen wird.



Approximation von Integralen durch eine Summe von Produkten

Man kann für die näherungsweise Berechnung von Flächeninhalten unter einem Graphen einer Funktion f Summen verwenden.



Man zerlegt dabei die von der Funktion f in einem Intervall $[a;b]$ festgelegte Fläche in sehr dünne Streifen.

Für den Flächeninhalt eines solchen Streifens gilt:

$$\Delta A \approx f(x) \cdot \Delta x$$

Der Flächeninhalt $A(a,b)$ der gesamten Fläche von a bis b ist dann näherungsweise die Summe dieser Flächen ΔA:

$$A(a,b) \approx \sum f(x) \cdot \Delta x$$

Wenn man sich vorstellt, dass alle diese Streifen „unendlich dünn“ werden, so strebt $\Delta x \to 0$.
Dann ergibt sich für die Gesamtfläche

$$A(a,b) = \sum f(x) \cdot dx$$

Bei dieser Summe handelt es um eine **Summe von sehr vielen sehr kleinen Produkten** der Form $f(x) \cdot \Delta x$.

Man schreibt $A(a,b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Das Integralzeichen $\int$ ist aus dem Summenzeichen $\sum$ bzw. S für Summe entstanden.

dx deutet an, dass der Grenzübergang $\Delta x \to 0$ bereits durchgeführt wurde.

Anmerkung:
Wenn man von a ausgehend einen Streifen betrachtet, der als Breite 0 hat, so hat dieser Streifen den Flächeninhalt 0.

Es gilt daher: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Stammfunktion

Eine Hauptaufgabe der Differentialrechnung ist es, zu einer Funktion $y = f(x)$ die Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ zu finden. Mit dieser kann man zum Beispiel die Momentangeschwindigkeit berechnen oder die Steigung einer Tangente in einem bestimmten Punkt eines Funktionsgraphen angeben.

Umgekehrt kann man aus der gegebenen Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ die ursprüngliche Funktion oder die Stammfunktion finden. Diesen Vorgang nennt man Aufsuchen der Stammfunktion. Dabei wird also eine Funktion $F(x)$ gesucht, deren Ableitung die Funktion $f(x)$ ist.

Stammfunktion

Eine reelle Funktion F heißt Stammfunktion der reellen Funktion f über einer gemeinsamen Definitionsmenge D, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in D$$

Zeige, dass die Funktionen

a) $F_1(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x$

b) $F_2(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 2$

c) $F_3(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x - 1$

d) $F_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + c$

Stammfunktionen der Funktion $f(x) = \frac{3}{10}x^2 - x - \frac{4}{5}$ sind!

Wenn $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann muss $f(x) = F'(x)$ gelten.

a) $F_1(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x$

$F_1'(x) = \frac{3}{10}x^2 - x - \frac{4}{5}$ w. z. z. w.

b) $F_2(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 2$

$F_2'(x) = \frac{3}{10}x^2 - x - \frac{4}{5}$ w. z. z. w.

Beim Ableiten fällt die Konstante 2 weg.

c) $F_3(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x - 1$

$F_3'(x) = \frac{3}{10}x^2 - x - \frac{4}{5}$ w. z. z. w.

Beim Ableiten fällt die Konstante –1 weg.

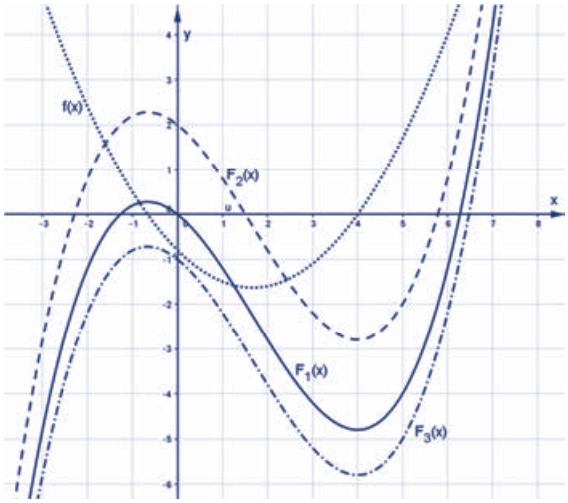
d) $F_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + c$

$F_4'(x) = \frac{3}{10}x^2 - x - \frac{4}{5}$ w. z. z. w.

Beim Ableiten fällt die Konstante c weg.

Aus dem Beispiel erkennt man:
Alle Funktionen, die sich nur durch eine Konstante c $(c \in \mathbb{R})$ unterscheiden, sind Stammfunktionen derselben Funktion.

Ihre Graphen liegen parallel und können durch Schiebung entlang der y-Achse ineinander übergeführt werden.



Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer gegebenen Funktion $f(x)$ wird als **unbestimmtes Integral** bezeichnet.

Man schreibt: $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ mit $(c \in \mathbb{R})$

Man bezeichnet $f(x)$ als **Integrand** und c als **Integrationskonstante**.

Übersicht:

$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$

Stammfunktion		Ableitungsfunktion
$F(x)$	**DIFFERENZIEREN nach x** $\longrightarrow$	$f(x)$
	$\longleftarrow$ **INTEGRIEREN nach x**	Es gilt: $f(x) = F'(x)$

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$ „Integral $f(x)$ nach dx“

Stammfunktionen von Summen und Vielfachen von Funktionen

Sind $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$ bzw. $g(x)$, dann gilt:

(1) $F(x) + G(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$ .... Summenregel
(2) $F(x) - G(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) - g(x)$ .... Differenzregel
(3) $k \cdot F(x)$ ist eine Stammfunktion von $k \cdot f(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$ .... Konstantenregel

Berechnung von Stammfunktionen mit Hilfe von Grundintegralen

Für den Beweis der folgenden Formeln kannst du die Grundintegrale jeweils differenzieren.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = a$	$F(x) = a \cdot x + c$	mit $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = 0$	$F(x) = c$	mit $x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$ bzw. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	mit $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$f(x) = a \cdot x^n$	$F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$ bzw. $F(x) = \frac{a \cdot x^{n+1}}{n+1} + c$	mit $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ermittle die Stammfunktion der Funktion f! Überprüfe das Ergebnis durch Differenzieren!

a) $f(x) = x^2$ — Stammfunktion der Potenzfunktion

$F(x) = \frac{1}{3} x^{2+1} = \frac{x^3}{3} + c$

Probe:

$F(x) = \frac{x^3}{3} + c$

$f(x) = F'(x) = \frac{3 \cdot x^2}{3} + 0 = x^2$

b) $f(x) = 5x^3 - 2x$ — Differenzregel, Stammfunktion von Potenzfunktionen

$F(x) = 5 \cdot \frac{x^{3+1}}{4} - 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{2} =$

$= \frac{5}{4} \cdot x^4 - x^2 + c$ — Vergiss nicht auf die Integrationskonstante

Probe:

$F(x) = \frac{5}{4} \cdot x^4 - x^2 + c$

$f(x) = F'(x) = 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot x^3 - 2 \cdot x + 0 =$

$= 5x^3 - 2x$

Beachte:
Da die Begriffe „Stammfunktion“ und „unbestimmtes Integral“ nahezu dasselbe bedeuten, ist die Aufgabestellung „Ermittle die Stammfunktion der Funktion f“ gleichbedeutend mit der Aufgabenstellung „Berechne das unbestimmte Integral“

Berechne das unbestimmte Integral! Überprüfe das Ergebnis durch Differenzieren!

a) $\int (2x^5 + 1)\, dx =$ — Summenregel, Integration der Potenzfunktion

$= \int 2x^5\, dx + \int 1\, dx =$

$= 2 \cdot \frac{x^6}{6} + x =$

$= \frac{x^6}{3} + x + c$

Probe:

$\left(\frac{x^6}{3} + x + c\right)' = 6 \cdot \frac{x^5}{3} + 1 + 0 = 2x^5 + 1$

b) $\int \frac{5}{x^2}\,dx =$ Verwandle in eine Potenzfunktion, Integration

$= \int 5x^{-2}\,dx =$

$= 5 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{5}{x} + c$

Probe:

$\left(-\frac{5}{x} + c\right)' = \left(-5x^{-1} + c\right)' = -5 \cdot (-1) \cdot x^{-2} + 0 = \frac{5}{x^2}$

Beispiele zur Berechnung von Integralen, wo zunächst der Integrand vereinfacht werden muss.

Berechne folgende unbestimmte Integrale!

a) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 5x}{x}\,dx =$ Kürzen durch x

$= \int \left(x^2 - 2x + 5\right) dx = \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + c$

b) $\int \frac{3x - 1}{x^3}\,dx =$ Kürzen durch x^3

$= \int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \left(3 \cdot x^{-2} - x^{-3}\right) dx = 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$

c) $\int \frac{x^2 - 9}{x + 3}\,dx = \int \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x+3}\,dx =$ Zerlegen und Kürzen durch $x + 3$

$= \int (x - 3)\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$

d) $\int \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}\,dx =$ Verwandle in ein Produkt von Linearfaktoren unter Verwendung des 3. Satzes von Vieta (siehe Mathematik Aufsteigen, 5. Klasse)

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 15}$

$x_{1,2} = 1 \pm 4$

$x_1 = -3,\ x_2 = 5$

$x^2 - 2x - 15 = (x + 3) \cdot (x - 5)$

$= \int \frac{(x+3)\cdot(x-5)}{x-5}\,dx =$ Kürzen

$= \int (x + 3)\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + c$

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x \rvert + c$	mit $x \in \mathbb{R}^+$
$f(x) = \frac{1}{x+d}$	$F(x) = \ln\lvert x + d \rvert + c$	mit $x \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$ und $x \neq -d$

Berechne folgende unbestimmte Integrale!

a) $\int \frac{3}{x}\,dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x}\,dx =$ Anwenden der Formel

$= 3 \cdot \ln\lvert x \rvert + c$

b) $\int \frac{5}{x+1}\,dx =$ Anwenden der Formel

$= 5 \cdot \ln|x+1| + c$

c) $\int \left(\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x}\right) dx =$ Differenzregel, Anwenden der Formel

$= \int \left(7 \cdot x^{-2} - 6 \cdot \frac{1}{x}\right) dx = 7 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - 6 \cdot \ln|x| =$

$= -\frac{7}{x} - 6 \cdot \ln|x| + c$

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	mit $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^{a \cdot x}$	$F(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} + c$	mit $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$	mit $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Ermittle die Stammfunktion der Funktion $f(x)$!

a) $f(x) = e^x - 3$ Anwenden der Formel

$F(x) = e^x - 3x + c$

b) $f(x) = e^{3x} + 2$ Anwenden der Formel

$F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + 2x + c$

c) $f(x) = 5^x + 5x$ Anwenden der Formel

$F(x) = \frac{5^x}{\ln(5)} + \frac{5x^2}{2} + c$

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x + c$	mit $x \in \mathbb{R}^+$
$f(x) = {}^a\log(x)$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \left[x \cdot \ln(x) - x\right] + c$	mit $x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Berechne folgende unbestimmte Integrale!

a) $\int \frac{1}{4} \cdot \ln(x)\,dx =$ Anwenden der Formel

$= \frac{1}{4} \cdot \left[x \cdot \ln(x) - x\right] + c$

b) $\int {}^2\log(x)\,dx =$ Anwenden der Formel

$= \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left[x \cdot \ln(x) - x\right] + c$

c) $\int \ln(x^2)\,dx =$ Umformen (Logarithmusregeln), Anwenden der Formel

$= \int 2 \cdot \ln(x)\,dx = 2 \cdot \left[x \cdot \ln(x) - x\right] + c$

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$	
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	mit $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(a \cdot x)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cdot \cos(a \cdot x) + c$	mit $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$	mit $x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(a \cdot x)$	$F(x) = \frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x) + c$	mit $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Berechne folgende unbestimmte Integrale!

a) $\int [\sin(x) - \cos(x)]\, dx =$ Differenzregel, Anwenden der Formel

$= -\cos(x) - \sin(x) + c$

b) $\int [3 \cdot \sin(x) + x]\, dx =$ Summenregel, Anwenden der Formel

$= -3 \cdot \cos(x) + \frac{x^2}{2} + c$

c) $\int \cos(3x)\, dx =$ Anwenden der Formel

$= \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + c$

Berechnung von bestimmten Integralen

Mit Hilfe von Stammfunktionen kann man den Wert eines bestimmten Integrals berechnen. Dazu dient der folgende Satz:

Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist f eine im Intervall $[a; b]$ stetige Funktion und ist F eine beliebige Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$ wobei das Ergebnis eine reelle Zahl ist.

Die Zahl a wird als Untergrenze, die Zahl b als Obergrenze bezeichnet.

Berechne!

$\int_1^3 x^2\, dx$ Eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2$ ist $F(x) = \frac{x^3}{3}$

Es gilt daher $\int_1^3 x^2\, dx = F(3) - F(1) =$ „obere Grenze“ minus „untere Grenze“

$= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

Beachte:

Folgende abgekürzte Schreibweisen sind in der Mathematik üblich:

$\int_1^3 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$ oder $\int_1^3 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

8

Kompetent AUFSTEIGEN Mathematik 8

enthält den wesentlichen Lernstoff des **österreichischen Lehrplans** für die **8. Klasse AHS,** der zum Aufsteigen unbedingt nötig ist.
Das Wissen über den Lehrstoff ist an zahlreichen Beispielen anwendbar und kontrollierbar.

Kompetent AUFSTEIGEN Mathematik 8

dient als Vorbereitung auf die **standardisierte und kompetenzorientierte Reifeprüfung** (Zentralmatura). Am Ende jeden Kapitels werden Fragen und Übungen zur Grundkompetenz (z. B. Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Argumentieren, Begründen) gestellt.
Der gesamte Stoff der Oberstufe ist übersichtlich dargestellt. Detaillierte Hinweise auf den Stoff der einzelnen Klassen erleichtern die Vorbereitung auf die Reifeprüfung.

Der Band enthält:

- ✓ genau erklärte Rechengänge
- ✓ übersichtlich mehrfärbig gestaltete Kapitel mit hervorgehobenen Musterbeispielen
- ✓ zahlreiche Übungsbeispiele, einfach selbst zu überprüfen mit dem beigelegten Lösungsheft
- ✓ Fragen und Übungen zur Vorbereitung auf die Zentralmatura

✓ Mit jedem Schulbuch verwendbar!

ISBN 978-3-7074-2115-6
€ 18.-
9 783707 421156

Infos und Musterseiten zu allen erschienenen Titeln unter
www.ggverlag.at

Mathematik
Kompetent AUFSTEIGEN
Wagner / Wagner

G&G