Helga Wagner • Günther Wagner

Mathematik positiv!

Neuausgabe für die Zentralmatura 2014

7. Klasse AHS

Österreichischer Lehrplan

G&G

www.ggverlag.at

ISBN 978-3-7074-1684-8

1. Auflage 2014

Printed in Europe

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Mathematik positiv! 7 deckt den gesamten Lehrstoff der 7. Klasse ab und bereitet dich auf die standardisierte und kompetenzorientierte Reifeprüfung (Zentralmatura) vor.
Zu Beginn jedes Kapitels werden die Grundkompetenzen und die erweiterten Kompetenzen angegeben. Diese beschreiben den grundlegenden und unverzichtbaren Bereich des Lehrplans.
Die Theorie dazu wird verständlich vorgeführt, wichtige Sätze, Definitionen und Formeln werden hervorgehoben. Durch eine Fülle von Beispielen werden die Kompetenzen und deren Anwendungen aufgezeigt und dadurch nachvollziehbar.
Die zusätzlichen Übungsaufgaben sind in einem Lösungsband vollständig durchgerechnet und geben dir die Möglichkeit, selbstständig zu üben.

Wenn du dich für die Schularbeit oder für eine Prüfung vorbereitest, empfehlen wir dir, zunächst den Theorieteil zu lernen und dann mit dem Üben zu beginnen. In einem eigenen Abschnitt gibt es Fragen zu diesem Kapitel. Zur Kontrolle sind im Lösungsband jene Seiten angegeben, auf denen du die Antworten findest.
In einem neuen Prüfungsformat (z. B. Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Argumentieren, Begründen) werden auch viele Beispiele angegeben, welche die Grundkompetenzen und erweiterten Kompetenzen mit Blickrichtung auf die zentrale Reifeprüfung in Mathematik ab dem Haupttermin 2014 festigen.

Kontrolliere jedes deiner Beispiele mit dem Lösungsheft, richtig gerechnete Beispiele geben dir Sicherheit für die Prüfungssituation.
Am Ende jedes Kapitel gibt es ein Mindmap, das die wichtigen Begriffe und Zusammenhänge visualisiert. Jeden vorkommenden Ausdruck solltest du mit den zugehörigen Inhalten des Kapitels verbinden können. So kannst du nochmals überprüfen, ob du den Lehrstoff beherrschst.

Viel Erfolg und dadurch Freude an der Mathematik wünschen dir die Autoren.

INHALTSANGABE

A Komplexe Zahlen

1 Definition 6
2 Überblick über die Zahlenmengen 7
3 Darstellen von komplexen Zahlen 9
 GAUSS'sche Zahlenebene 9
 Polardarstellung komplexer Zahlen 9
4 Rechnen mit komplexen Zahlen 12
 Rechnen mit komplexen Zahlen in der Normalform 12
 Rechnen mit komplexen Zahlen in Polardarstellung bzw. in der trigonometrischen Darstellung 14

B Algebraische Gleichungen 24

1 Quadratische Gleichungen 24
 Lösen von quadratischen Gleichungen 24
 Darstellen von quadratischen Polynomen als Produkt von Linearfaktoren 25
 Lösbarkeit von quadratischen Gleichungen 25
2 Algebraische Gleichungen höheren Grades 26
 Grundlegende Begriffe 26
3 Lösen von algebraischen Gleichungen höheren Grades 31
4 Das Lösen von besonderen Gleichungen höheren Grades 37
 Biquadratische Gleichungen 37
 Symmetrische (reziproke) Gleichungen 38
 Binomische Gleichungen 39

C Differentialrechnung 46

1 Differenzenquotient – Differentialquotient 46
 Tangenten in einem Punkt eines Funktionsgraphen 46
 Differenzierbarkeit 49
 Mittlere Geschwindigkeit – Momentangeschwindigkeit 51
 Mittlere Änderungsrate – Momentane Änderungsrate 53
 Die Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient in verschiedenen Kontexten 54
2 Ableitungsfunktion 57
 Regeln für die Bildung der Ableitungsfunktion 57
 Implizites Differenzieren 65
 Ableitung der Winkelfunktionen 69
 Ableitung der Logarithmusfunktion 72
 Ableitung der Exponentialfunktionen 74
 Arbeiten mit elektronischen Hilfsmitteln 75
3 Höhere Ableitungen und ihre Bedeutung 80
 Höhere Ableitungen 80
 Zusammenhang zwischen der Funktion und den beiden ersten Ableitungen 81
4 Kurvendiskussionen 89
 Diskussion von Polynomfunktionen 89
 Diskussion von rationalen Funktionen 99
 Diskussion von Winkelfunktionen 103
 Diskussion von Exponential- und Logarithmusfunktionen 107
5 Weitere Anwendungen der Differentialrechnung
 Das Newton'sche Näherungsverfahren 117
 Extremwertaufgaben 119
 Aufgaben aus Naturwissenschaften und Wirtschaft 126
 Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe der Regel von l'Hospital 135
 Approximation von Funktionen mit Hilfe von Taylorreihen 136

D Kreis und Kugel 145

1 Der Kreis 145
2 Kreis und Gerade 150
 Gegenseitige Lage und Schnitt von Kreis und Gerade 150
 Kreistangenten 154
3 Schnitt und gegenseitige Lage von Kreisen 158
4 Schnittwinkelberechnungen 161
 Schnittwinkel zwischen Kreis und Gerade 161
 Schnittwinkel zwischen Kreisen 163
5 Die Kugel 165

E Kegelschnitte

1 Die Ellipse 174
 Definition und Gleichung der Ellipse 174
2 Die Hyperbel 178
 Definition und Gleichung der Hyperbel 178
3 Die Parabel 182
 Definition und Gleichung der Parabel 182
4 Kegelschnitte 185
 Begriffsklärung 185
 Scheitelgleichung der Kegelschnitte 185
5 Lagebeziehung Gerade – Kegelschnitte 186

6 Kegelschnitte und Tangenten 189
Tangenten in einem Punkt eines Kegelschnitts 189
Tangenten von einem Punkt an einen Kegelschnitt 190
7 Kegelschnitte – Vermischte Aufgaben 192

F Kurven und Flächen 199
1 Parameterdarstellung eines Kreises 199
2 Parameterdarstellung von Kegelschnitten 201
3 Parameterdarstellung von weiteren ebenen Kurven 203
4 Parameterdarstellungen von Kurven und Flächen im Raum 206

G Wahrscheinlichkeit und Statistik 211
1 Daten mit Hilfe der beschreibenden Statistik darstellen 211
2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen 213
Zufallsvariable 213
Wahrscheinlichkeitsfunktion – Verteilungsfunktion 214
3 Kennzahlen von Verteilungen 217
Erwartungswert einer Zufallsvariablen 217
Varianz einer Zufallsvariablen 218
4 Die Binomialverteilung 220
Bernoulli-Experiment – Binomialverteilung 221
Erwartungswert und Varianz einer binomialverteilten Zufallsvariablen 226
5 Die hypergeometrische Verteilung 227

A. KOMPLEXE ZAHLEN

Komplexe Zahlen spielen in der Mathematik eine große Rolle. Man erweitert mit ihnen den Zahlenbereich der reellen Zahlen, um auch Wurzeln aus negativen Zahlen angeben zu können. Komplexe Zahlen werden aber auch in der Physik verwendet, um beispielsweise Berechnungen in der Wechselstrom-Technik durchführen zu können.

GRUNDKOMPETENZEN – Erweiterte KOMPETENZEN

Du wirst in diesem Kapitel
- ⇨ komplexe Zahlen in der Form $a+b\cdot i$ kennenlernen
- ⇨ komplexe Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene darstellen
- ⇨ Rechenregeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen kennenlernen
- ⇨ den Zusammenhang mit anderen Darstellungsformen herleiten und anwenden
- ⇨ komplexe Lösungen von algebraischen Gleichungen ermitteln
- ⇨ einen Überblick über die Zahlenmengen gewinnen

1 Definition

Die quadratische Gleichung $x^2+1=0$ hat in der Menge $\mathbb{R}$ keine Lösung.

$$x^2+1=0$$
$$x^2=-1 \qquad \text{keine Lösung in } \mathbb{R}$$

Um dennoch für solche Gleichungen Lösungen angeben zu können, wird die Menge der reellen Zahlen erweitert. Dazu definiert man die „Zahl" i, wobei $i^2=-1$ gilt. „i" wird als imaginäre Einheit bezeichnet.

$$x^2+1=0$$
$$x^2=-1$$
$$x^2=i^2$$
$$x=\pm i$$

Die Lösung der Gleichung lautet daher: $(x=-i)\vee(x=i)$

Beispiel: Löse die Gleichung $x^2+4=0$!

$$x^2+4=0$$
$$x^2=-4$$
$$x^2=4\cdot(-1)$$
$$x^2=4\cdot i^2$$
$$x=\pm 2\cdot i$$
$$(x=-2i)\vee(x=2i)$$

Imaginäre Zahlen

$i^2=-1$ i … imaginäre Einheit

Die Zahl i und alle Vielfachen von i wie 2i, –3i, … , bi, … werden imaginäre Zahlen genannt.

Anmerkung:
Für die Potenzen von i gilt:

$$i^2=-1$$
$$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$$
$$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$$
$$i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=i^2=-1$$
$$i^7=i^6\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$
$$\vdots$$

Beispiel: Löse die Gleichung $x^2-10x+29=0$!

$x^2-10x+29=0$ Lösungsformel: $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

$p=-10;\ q=29 \Rightarrow x=5\pm\sqrt{25-29}=5\pm\sqrt{-4}$

$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4\cdot i^2}=2i$

$x=5\pm 2i$

$(x=5-2i)\vee(x=5+2i)$

Die Lösung dieser Gleichung setzt sich aus einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl zusammen.

$5 \quad - \quad 2i$

reelle Zahl imaginäre Zahl

Solche Zahlen werden als komplexe Zahlen bezeichnet. Allgemein schreibt man für komplexe Zahlen $z=a+b\cdot i$ mit $a,b\in\mathbb{R}$, wobei man a als **Realteil** $a=\operatorname{Re}(z)$ und b als **Imaginärteil** $b=\operatorname{Im}(z)$ der komplexen Zahl z bezeichnet.

Komplexe Zahlen

Zahlen der Form $z=a+b\cdot i$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ werden als komplexe Zahlen bezeichnet.
Gilt $b\neq 0$, so spricht man von echt-komplexen Zahlen.
Alle Zahlen der Form $z=a+b\cdot i$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ bilden die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Anmerkung:
Ist $b=0$, dann ist $z=a+0\cdot i=a$, wobei a jede beliebige reelle Zahl sein kann. Die Menge $\mathbb{C}$ enthält daher auch alle reellen Zahlen. Es gilt $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
Ist $a=0$, dann erhält man: $z=0+b\cdot i=bi$, also eine imaginäre Zahl. Die Menge $\mathbb{C}$ enthält auch alle imaginären Zahlen.

Beispiel: Löse die quadratische Gleichung $x^2-6x+25=0$ über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

$x^2-6x+25=0$

$p=-6;\ q=25 \quad\Rightarrow\quad x=3\pm\sqrt{9-25}=3\pm\sqrt{-16}=3\pm 4i$

$\Rightarrow\quad x_1=3-4i;\ x_2=3+4i;\quad L=\{3-4i;\ 3+4i\}$

Die beiden Lösungselemente unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen beim Imaginärteil. Solche Zahlen werden als konjugiert-komplexe Zahlen bezeichnet.

Konjugiert-komplexe Zahlen

Zwei komplexe Zahlen z und $\bar{z}$ heißen zueinander konjugiert, wenn sie sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden.

$z=a+b\cdot i,\ \bar{z}=a-b\cdot i \quad a,b\in\mathbb{R}$

2 Überblick über die Zahlenmengen

Bereits in der Unterstufe hast du einige Zahlenbereichserweiterungen kennengelernt. Ausgangspunkt sind die natürlichen Zahlen, die zum Zählen, Nummerieren und Ordnen verwendet werden.

$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;\ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

Die **Menge der natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$ ist gegenüber der Addition und der Multiplikation abgeschlossen, d. h. die Addition und die Multiplikation sind uneingeschränkt möglich.

$\forall\, a,b\in\mathbb{N}:\quad a+b\in\mathbb{N}$

$a\cdot b\in\mathbb{N}$

Ausgehend von der Menge $\mathbb{N}$ wurde die erste Zahlenbereichserweiterung zu den ganzen Zahlen gemacht. In der Menge $\mathbb{N}$ ist die Subtraktion nicht immer möglich. Um diese stets ausführen zu können, wird die Menge $\mathbb{N}$ um die Menge der negativen ganzen Zahlen erweitert. Dadurch erhält man die Menge $\mathbb{Z}$, die Menge der ganzen Zahlen.

$\mathbb{Z}=\{\ldots-3;-2;-1;0;+1;+2;+3;\ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

Die **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ ist gegenüber der Addition, der Multiplikation und auch gegenüber der Subtraktion abgeschlossen.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Z}: \quad a+b \in \mathbb{Z} \qquad a-b \in \mathbb{Z}$$
$$a \cdot b \in \mathbb{Z}$$

Um auch uneingeschränkt dividieren zu können (Ausnahme: Division durch Null) wurde die Menge $\mathbb{Z}$ zur **Menge der rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ erweitert.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{a}{b} \mid (a \in \mathbb{Z}) \wedge \left(b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right) \right\} \quad \text{Menge der rationalen Zahlen}$$

In der Menge $\mathbb{Q}$ sind alle Zahlen, die sich als Bruch $\frac{a}{b}$ darstellen lassen, enthalten.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Q}: \quad a+b \in \mathbb{Q} \qquad a-b \in \mathbb{Q}$$
$$a \cdot b \in \mathbb{Q} \qquad a : b \in \mathbb{Q} \quad \text{mit } b \neq 0$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist gegenüber der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (Ausnahme: Division durch Null) abgeschlossen.

Die nächste Zahlenbereichserweiterung wurde notwendig, um aus nicht negativen Zahlen Wurzelziehen zu können. In der **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ ist das möglich.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}: \quad a+b \in \mathbb{R} \qquad a-b \in \mathbb{R}$$
$$a \cdot b \in \mathbb{R} \qquad a : b \in \mathbb{R} \quad \text{mit } b \neq 0$$
$$\sqrt{a} \in \mathbb{R} \quad \text{mit } a \geq 0$$

Die Menge $\mathbb{R}$ ist gegenüber der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (Ausnahme: Division durch Null) dem Wurzelziehen $\sqrt{a}$ mit $a \geq 0$ abgeschlossen.

Durch die letzte Zahlenbereichserweiterung erhält man die **Menge der komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$, in der nun auch die Wurzel einer negativen Zahl angegeben werden kann. Die Menge $\mathbb{C}$ ist also gegenüber der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und dem Wurzelziehen abgeschlossen.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{C}: \quad a+b \in \mathbb{C} \qquad a-b \in \mathbb{C}$$
$$a \cdot b \in \mathbb{C} \qquad a : b \in \mathbb{C} \quad \text{mit } b \neq 0$$
$$\sqrt{a} \in \mathbb{C} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

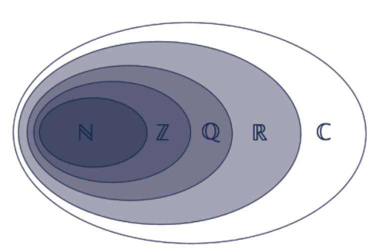
Übersicht Zahlenmenge – Rechenoperation

Zahlen-menge	Rechenoperationen, die ohne Einschränkung möglich sind	Einschränkungen
$\mathbb{N}$	Addition, Multiplikation	z. B. $5-12$ in $\mathbb{N}$ nicht ausführbar
$\mathbb{Z}$	Addition, Subtraktion, Multiplikation	z. B. $2:3$ in $\mathbb{Z}$ nicht ausführbar
$\mathbb{Q}$	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division ($\neq 0$)	z. B. $\sqrt{5}$ in $\mathbb{Q}$ nicht ausführbar
$\mathbb{R}$	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division ($\neq 0$), Wurzelziehen aus nicht negativen Zahlen	z. B. $\sqrt{-3}$ in $\mathbb{R}$ nicht ausführbar
$\mathbb{C}$	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division ($\neq 0$), Wurzelziehen	keine

Rechengesetze für Addition und Multiplikation

	Addition	Multiplikation
Kommutativ-gesetz (KG)	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativ-gesetz (AG)	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributiv-gesetz (DG)	$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	

Übersicht Zahlenmengen



Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

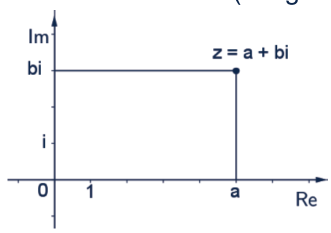
3 Darstellen von komplexen Zahlen

GAUSS'sche Zahlenebene

Da jede komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ sich aus einem Realteil a und einem Imaginärteil b zusammensetzt, kann ihr eindeutig das Zahlenpaar $(a; b)$ zugeordnet werden.

$z = a + b \cdot i \quad \Leftrightarrow \quad z = (a;b)$

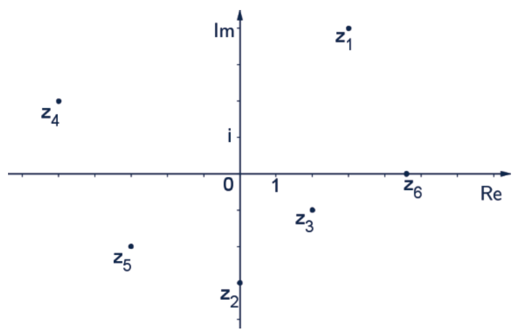
Die graphische Darstellung dieses Zahlenpaares ist nur in einer Ebene möglich, in der man ein rechtwinkliges Koordinatensystem definiert. Dabei wird auf der 1. Achse (reelle Achse) der Realteil und auf der 2. Achse (imaginäre Achse) der Imaginärteil aufgetragen.



Achsen
Re … reelle Achse
Im … imaginäre Achse

Einheiten
reelle Achse: 1
imaginäre Achse: i

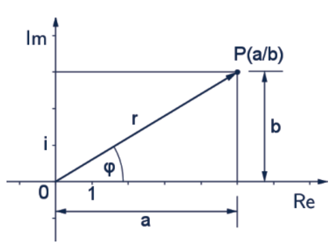
Beispiel: Stelle die Zahlen $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = 2 - i$, $z_4 = -5 + 2i$, $z_5 = -3 - 2i$, $z_6 = 5$ in der Gauss'schen Zahlenebene dar!



Anmerkung:
In der Menge $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnungsrelation. Man kann von zwei verschiedenen komplexen Zahlen im Allgemeinen nicht feststellen, welche die größere und welche die kleinere ist.

Polardarstellung komplexer Zahlen

Jeder komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$ ist der Punkt $P(a/b)$ der Gauss'schen Zahlenebene zugeordnet.



Jeder Punkt $P(a/b)$ der Gauss'schen Zahlenebene ist aber auch eindeutig durch den Abstand $r = \left|\overrightarrow{0P}\right|$ und den Winkel φ bestimmt.
Die Länge $r = \left|\overrightarrow{0P}\right|$ heißt **Betrag** der komplexen Zahl z, also $|z| = r$. Der Winkel φ mit $0 \le \varphi < 2\pi$ heißt **Argument** der komplexen Zahl, also $\arg z = \varphi$.

Zwischen a, b, r und φ gilt folgender Zusammenhang:

$r = \left|\overrightarrow{0P}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan \varphi = \frac{b}{a}$ mit $0 \le \varphi < 2\pi$
bzw. $0° \le \varphi < 360°$

$z = a + b \cdot i \quad \Leftrightarrow \quad z = (r; \varphi)$

$\cos \varphi = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a = r \cdot \cos \varphi$

$\sin \varphi = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \quad b = r \cdot \sin \varphi$

$z = a + b \cdot i \quad \Leftrightarrow \quad z = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi$

$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

Schreibweise komplexer Zahlen

(1) $z = a + b \cdot i$ **Normalform** $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(z) = a$ Realteil
$\mathrm{Im}(z) = b$ Imaginärteil
i … imaginäre Einheit

(2) $z = (a; b)$ **Zahlenpaar**

(3) $z = (r; \varphi)$ **Zahlenpaar in Polardarstellung**

(4) $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ **trigonometrische Darstellung**

Beispiel: Gib von der komplexen Zahl z alle anderen Schreibweisen an und stelle sie graphisch dar!
(a) $z_1 = 5 + 4i$ (b) $z_2 = (-2; -3)$ (c) $z_3 = (4; 110°)$ (d) $z_4 = 3 \cdot (\cos 300° + i \cdot \sin 300°)$

(a) Normalform: $z_1 = 5 + 4i$

Zahlenpaar: $z_1 = (5; 4)$

Polardarstellung:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$

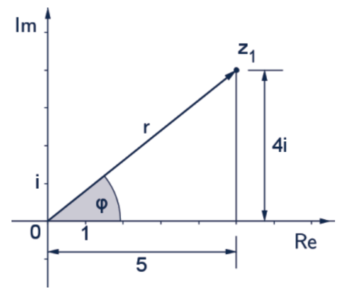
$\tan\varphi = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$(\varphi = 38{,}659..°) \vee (\varphi = 218{,}659..°)$ *Beachte*: $\tan\alpha = \tan(\alpha + 180°)$

Der Winkel φ muss ein spitzer Winkel sein, da auf Grund der gegebenen Normalform die komplexe Zahl im ersten Quadranten liegt.

$z_1 = \left(\sqrt{41}; 38{,}66°\right)$

trigonometrische Darstellung: $z_1 = \sqrt{41} \cdot (\cos 38{,}66° + i \cdot \sin 38{,}66°)$



(b) Zahlenpaar: $z_2 = (-2; -3)$

Normalform: $z_2 = -2 - 3i$

Polardarstellung:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$

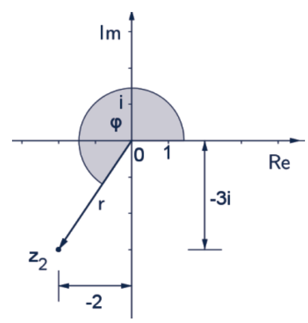
$\tan\varphi = \frac{-3}{-2} = 1{,}5$

$(\varphi = 56{,}309..°) \vee (\varphi = 236{,}309..°)$ *Beachte*: $\tan\alpha = \tan(\alpha + 180°)$

Der Winkel φ muss ein erhabener Winkel sein, da auf Grund des gegebenen Zahlenpaares die komplexe Zahl im dritten Quadranten liegt.

$z_2 = \left(\sqrt{13}; 236{,}31°\right)$

trigonometrische Darstellung: $z_2 = \sqrt{13} \cdot (\cos 236{,}31° + i \cdot \sin 236{,}31°)$



(c) Polardarstellung: $z_3 = (4; 110°)$

trigonometrische Darstellung: $z_3 = 4 \cdot (\cos 110° + i \cdot \sin 110°)$

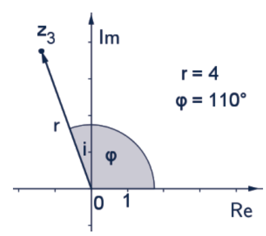
Normalform:

$z_3 = 4 \cdot (\cos 110° + i \cdot \sin 110°)$ ausrechnen

$z_3 = -1{,}368.. + 3{,}758.. \cdot i$

$z_3 = -1{,}37 + 3{,}76 \cdot i$

Zahlenpaar: $z_3 = (-1{,}37; 3{,}76)$



(d) trigonometrische Darstellung: $z_4 = 3\cdot(\cos 300° + i\cdot\sin 300°)$

Normalform:

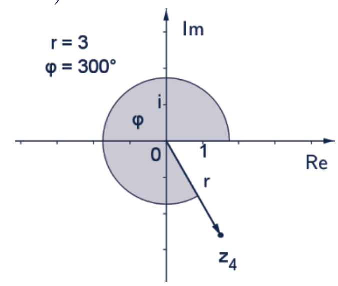
$z_4 = 3\cdot(\cos 300° + i\cdot\sin 300°)$ ausrechnen

$z_4 = 1{,}5 - 2{,}598..\cdot i$

$z_4 = 1{,}5 - 2{,}6\cdot i$

Zahlenpaar: $z_4 = (1{,}5; -2{,}6)$

Polardarstellung: $z_4 = (3; 300°)$



Beispiel: Ermittle die komplexe Zahl $z = a + bi$ für die

(a) $|z| = |z + 3i|$, $\mathrm{Re}(z) = 1$ (b) $|z| = |z - 2|$, $\mathrm{Im}(z) = 3$ gilt!

(a) $|z| = |z + 3i|$, $\mathrm{Re}(z) = 1$

$z = a + bi$

$z = 1 + bi$ Einsetzen

$|1 + bi| = |(1 + bi) + 3i|$

$|1 + bi| = |1 + bi + 3i|$

$|1 + bi| = |1 + (b + 3)i|$ Bestimme den Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\sqrt{1 + b^2} = \sqrt{1 + (b^2 + 6b + 9)}$ Quadrieren (beide Wurzelradikanden sind > 0. Es liegt also eine Äquivalenzumformung vor.)

$1 + b^2 = 1 + b^2 + 6b + 9$ Berechnung von b

$6b = -9$

$b = -1{,}5$

$z = 1 - 1{,}5i$

(b) $|z| = |z - 2|$, $\mathrm{Im}(z) = 3$

$z = a + bi$

$z = a + 3i$ Einsetzen

$|a + 3i| = |(a + 3i) - 2|$

$|a + 3i| = |(a - 2) + 3i|$ Bestimmung des Betrags, Quadrieren

$a^2 + 9 = a^2 - 4a + 4 + 9$ Berechnung von b

$4a = 4$

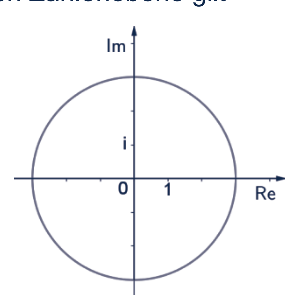
$a = 1$

$z = 1 + 3i$

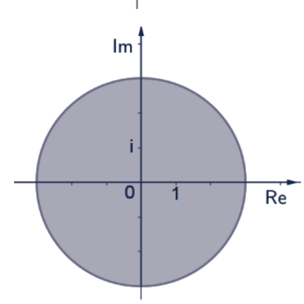
Beispiel: Stelle graphisch dar! Für welche Punkte der Gauss'schen Zahlenebene gilt

(a) $|z| = 3$ (b) $|z| \le 3$?

(a) Mit $|z| = 3$ werden alle komplexen Zahlen beschrieben, deren Betrag gleich 3 ist. Das sind also jene Zahlen, für die r = 3 gilt.



(b) Mit $|z| \le 3$ werden alle komplexen Zahlen beschrieben, deren Betrag kleiner oder gleich 3 ist. Das sind also jene Zahlen, für die $r \le 3$ gilt.



4 Rechnen mit komplexen Zahlen

In der Menge $\mathbb{C}$ gelten dieselben Rechengesetze wie in der Menge $\mathbb{R}$.

Rechnen mit komplexen Zahlen in der Normalform

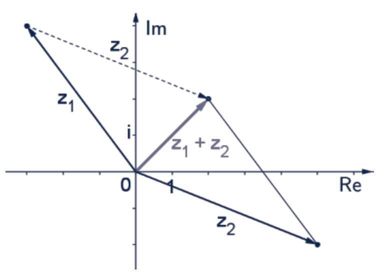
Addition und Subtraktion

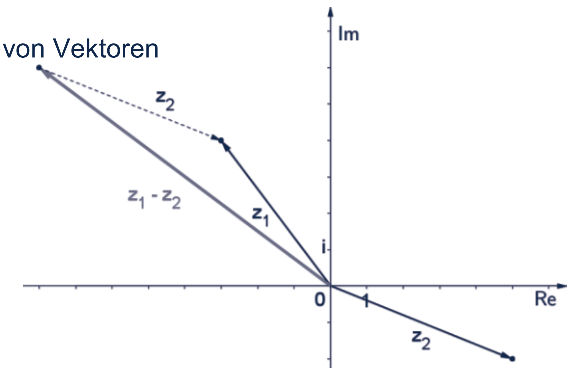
Beispiel: Berechne die Summe und die Differenz der beiden komplexen Zahlen $z_1 = -3+4i$ und $z_2 = 5-2i$ und veranschauliche diese in der Gauss'schen Zahlenebene!

$$z_1 + z_2 = (-3+4i)+(5-2i) = \\ = -3+4i+5-2i = \\ = 2+2i$$

$$z_1 - z_2 = (-3+4i)-(5-2i) = \\ = -3+4i-5+2i = \\ = -8+6i$$

graphische Darstellung:
Vergleiche Addition bzw. Subtraktion von Vektoren





Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen
Komplexe Zahlen werden addiert (subtrahiert), indem man die Realteile bzw. die Imaginärteile addiert (subtrahiert).

$$z_1 = a + b\cdot i \qquad z_2 = c + d\cdot i$$
$$z_1 + z_2 = (a+c)+(b+d)\cdot i$$
$$z_1 - z_2 = (a-c)+(b-d)\cdot i$$

Multiplikation

Beispiel: Berechne das Produkt der Zahlen $z_1 = -3+4i$ und $z_2 = 1-7i$

$$z_1 \cdot z_2 = (-3+4i)\cdot(1-7i) = \qquad \text{Multiplizieren der Binome}$$
$$= -3+4i+21i-28i^2 = \qquad i^2 = -1$$
$$= -3+4i+21i-28\cdot(-1) =$$
$$= 25+25i$$

Multiplikation von komplexen Zahlen
Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man sie wie Binome multipliziert.

$$z_1 = a + b\cdot i \qquad z_2 = c + d\cdot i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i) = ac + bc\cdot i + ad\cdot i + bd\cdot i^2 =$$
$$= (ac-bd)+(bc+ad)\cdot i$$

Beispiel: Berechne das Produkt der beiden konjugiert-komplexen Zahlen $z = -4+5i$ und $\bar{z} = -4-5i$!

$$z\cdot\bar{z} = (-4+5i)\cdot(-4-5i) = \qquad \text{Anwenden der Formel: } (x-y)\cdot(x+y) = x^2 - y^2$$
$$= (-4)^2 - (5i)^2 =$$
$$= 16 - 25i^2 =$$
$$= 16 - 25\cdot(-1) =$$
$$= 16 + 25 = 41 \qquad \text{Das Ergebnis ist eine reelle Zahl.}$$

Allgemein gilt für das Produkt konjugiert-komplexer Zahlen $z = a + b \cdot i$ und $\overline{z} = a - b \cdot i$:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a+bi) \cdot (a-bi) = \\ &= (a)^2 - (bi)^2 = \\ &= a^2 - b^2 \cdot i^2 = \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Produkt von konjugiert-komplexen Zahlen

Das Produkt zweier konjugiert-komplexer Zahlen ist stets eine reelle Zahl.

$z = a + b \cdot i \qquad \overline{z} = a - b \cdot i$

$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

Division

Beispiel: Berechne den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ der Zahlen $z_1 = -3 + 4i$ und $z_2 = 1 - 7i$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-3+4i}{1-7i} = \\ &= \frac{(-3+4i)\cdot(1+7i)}{(1-7i)\cdot(1+7i)} = \\ &= \frac{-3+4i-21i+28i^2}{1-49i^2} = \\ &= \frac{-3-17i-28}{1+49} = \\ &= \frac{-31-17i}{50} = \\ &= \frac{-31}{50} - \frac{17i}{50} = -0{,}62 - 0{,}34i \end{aligned}$$

Rationalmachen des Nenners durch Erweitern mit der konjugiert-komplexen Zahl $1 + 7i$

Division von komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man die Division als Bruch anschreibt, den Nenner rational macht und vereinfacht.

Potenzieren

Beispiel: Berechne z^2 und z^3 für $z = -3 + 4i$!

$$\begin{aligned} z^2 &= (-3+4i)^2 = \\ &= (-3)^2 + 2\cdot(-3)\cdot 4i + (4i)^2 = \\ &= 9 - 24i + 16i^2 = \\ &= -7 - 24i \end{aligned}$$

Quadrat eines Binoms: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$i^2 = -1$

$$\begin{aligned} z^3 &= (-3+4i)^3 = \\ &= (-3)^3 + 3\cdot(-3)^2\cdot 4i + 3\cdot(-3)\cdot(4i)^2 + (4i)^3 = \\ &= -27 + 3\cdot 9\cdot 4i - 9\cdot 16i^2 + 64i^3 = \\ &= -27 + 108i + 144 - 64i = \\ &= 117 + 44i \end{aligned}$$

Formel: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$i^2 = -1,\ i^3 = -i$

Potenzieren von komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen in der Normalform werden potenziert, indem man sie wie Binome potenziert und vereinfacht.

Beachte:

$i^2 = -1,\ i^3 = -i$ usw.

Rechnen mit komplexen Zahlen in Polardarstellung bzw. in der trigonometrischen Darstellung

Addition und Subtraktion

Beispiel: Berechne die Summe und die Differenz der komplexen Zahlen $z_1 = (2{,}5; 45°)$ und $z_2 = (1; 30°)$!

$$z_1 = 2{,}5 \cdot (\cos 45° + i \cdot \sin 45°) = 2{,}5 \cdot \cos 45° + 2{,}5 \cdot i \cdot \sin 45°$$
$$z_2 = 1 \cdot (\cos 30° + i \cdot \sin 30°) = \cos 30° + i \cdot \sin 30°$$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2{,}5 \cdot \cos 45° + 2{,}5 \cdot i \cdot \sin 45° + \cos 30° + i \cdot \sin 30° = \\ &= 2{,}5 \cdot \cos 45° + \cos 30° + (2{,}5 \cdot \sin 45° + \sin 30°) \cdot i \end{aligned}$$

Durch Ausrechnen erhält man die Summe in Normalform:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2{,}633.. + 2{,}267.. \cdot i = \\ &= 2{,}63 + 2{,}27 \cdot i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 2{,}5 \cdot \cos 45° + 2{,}5 \cdot i \cdot \sin 45° - (\cos 30° + i \cdot \sin 30°) = \\ &= 2{,}5 \cdot \cos 45° - \cos 30° + (2{,}5 \cdot \sin 45° - \sin 30°) \cdot i \end{aligned}$$

Normalform:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 0{,}901.. + 1{,}267.. \cdot i = \\ &= 0{,}90 + 1{,}27 \cdot i \end{aligned}$$

Multiplikation

Für das Produkt der beiden komplexen Zahlen $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ gilt:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$$
$$z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i^2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i \cdot (\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] = \end{aligned}$$

Umkehrung des 1. Summensatzes
(Mathematik positiv! 5. Klasse, Seite 196)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

also:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1; \varphi_1) \cdot (r_2; \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$$

Multiplikation von komplexen Zahlen in Polardarstellung

Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

$$z_1 = (r_1; \varphi_1), \quad z_2 = (r_2; \varphi_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (r_1; \varphi_1) \cdot (r_2; \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$$

Beispiel: Berechne das Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = (2{,}5; 45°)$ und $z_2 = (1; 30°)$!

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2{,}5 \cdot 1; 45° + 30°) = \\ &= (2{,}5; 75°) \end{aligned}$$

trigonometrische Darstellung:

$$z_1 \cdot z_2 = 2{,}5 \cdot (\cos 75° + i \cdot \sin 75°)$$

Division

Für den Quotienten der beiden komplexen Zahlen $z_1 = (r_1 ; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2 ; \varphi_2)$ gilt:

$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$
$z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)} =$$ Rationalmachen des Nenners

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \cdot \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) \cdot (\cos \varphi_2 - i \cdot \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - i \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 - i^2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - i \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 - i^2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}{1} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left[(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i \cdot (\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \right] =$$

Umkehrung des 1. Summensatzes
(Mathematik positiv! 5. Klasse, Seite 196)
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

also:

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(r_1 ; \varphi_1)}{(r_2 ; \varphi_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2} ; \varphi_1 - \varphi_2 \right)$$

Division von komplexen Zahlen in Polardarstellung
Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert.

$z_1 = (r_1 ; \varphi_1)$, $z_2 = (r_2 ; \varphi_2)$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(r_1 ; \varphi_1)}{(r_2 ; \varphi_2)} = \left(\frac{r_1}{r_2} ; \varphi_1 - \varphi_2 \right)$$

Beispiel: Berechne den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ der komplexen Zahlen $z_1 = (2{,}5; 45°)$ und $z_2 = (1; 30°)$!

$$z_1 : z_2 = \left(\frac{2{,}5}{1} ; 45° - 30° \right) =$$
$$= (2{,}5; 15°)$$

trigonometrische Darstellung:

$$z_1 : z_2 = 2{,}5 \cdot (\cos 15° + i \cdot \sin 15°)$$

Potenzieren

Das Potenzieren lässt sich auf eine Multiplikation gleicher Faktoren zurückführen. Es gelten die Regeln für das Multiplizieren.

Für die Potenzen der komplexen Zahlen z gilt:

$z = (r ; \varphi)$ | $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

$z^2 = z \cdot z = (r ; \varphi) \cdot (r ; \varphi) = (r \cdot r ; \varphi + \varphi) = (r^2 ; 2\varphi)$ | $z^2 = r^2 \cdot (\cos(2\varphi) + i \cdot \sin(2\varphi))$

$z^3 = z^2 \cdot z = (r^2 ; 2\varphi) \cdot (r ; \varphi) = (r^3 ; 3\varphi)$ | $z^3 = r^3 \cdot (\cos(3\varphi) + i \cdot \sin(3\varphi))$

$z^4 = z^3 \cdot z = (r^3 ; 3\varphi) \cdot (r ; \varphi) = (r^4 ; 4\varphi)$ | $z^4 = r^4 \cdot (\cos(4\varphi) + i \cdot \sin(4\varphi))$

usw.
allgemein gilt:

$z^n = (r^n ; n \cdot \varphi)$ | $z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

Aus dieser Ableitung ergibt sich eine Formel für das Potenzieren einer komplexen Zahl, die nach dem französischen Mathematiker Abraham de MOIVRE (1667-1754) benannt wurde.

Satz von MOIVRE

$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Beispiel: Berechne z^2, z^3 und z^6 für $z = (3; 140°)$!

$z^2 = r^2 \cdot (\cos(2\varphi) + i \cdot \sin(2\varphi))$ Anwenden des Satzes von MOIVRE

$z^2 = 3^2 \cdot (\cos(2 \cdot 140°) + i \cdot \sin(2 \cdot 140°))$

$z^2 = 9 \cdot (\cos 280° + i \cdot \sin 280°)$

$z^3 = r^3 \cdot (\cos(3\varphi) + i \cdot \sin(3\varphi))$

$z^3 = 27 \cdot (\cos 420° + i \cdot \sin 420°)$

Jeder Winkel $\geq 360°$ wird durch den entsprechenden Winkel des Intervalls $[0°; 360°[$ (= Definitionsbereich) des Arguments ersetzt:

$420° = 360° + 60° \Rightarrow 420° \triangleq 60°$ (reduzierte Darstellung).

$z^3 = 27 \cdot (\cos 60° + i \cdot \sin 60°)$

$z^6 = r^6 \cdot (\cos(6\varphi) + i \cdot \sin(6\varphi))$

$z^6 = 729 \cdot (\cos 840° + i \cdot \sin 840°)$ $\qquad 840° = 2 \cdot 360° + 120° \Rightarrow 840° \triangleq 120°$

$z^6 = 729 \cdot (\cos 120° + i \cdot \sin 120°)$

Radizieren (Wurzelziehen)

Das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Potenzierens. Zieht man die dritte Wurzel von $z = (r; \varphi)$, so muss man als Wurzelwert $\zeta = \sqrt[3]{z}$ jene komplexe Zahl finden, für die $\zeta^3 = z$ gilt.
Beachte: Die Wurzel aus einer komplexen Zahl wird mit dem griechischen Buchstaben Zeta ζ bezeichnet.

Wenn man beispielsweise $\sqrt[3]{(27; 60°)}$ berechnen möchte, muss man jenen Wurzelwert ζ finden, für den $\zeta^3 = (27; 60°)$ ist. Zu beachten ist aber, dass mit $z = (27; 60° + k \cdot 360°)$ gerechnet werden muss, da $z = (27; 60°)$ eine reduzierte Darstellung sein kann. (Vergleiche das vorige Beispiel)

$\zeta^3 = (27; 60° + k \cdot 360°)$ $\qquad \zeta$ in Polardarstellung $\zeta = (R; \alpha)$ mit $R \in \mathbb{R}^+, 0° \leq \alpha < 360°$

$(R; \alpha)^3 = (27; 60° + k \cdot 360°)$ $\qquad$ Ausrechnen der Potenz

$(R^3; 3\alpha) = (27; 60° + k \cdot 360°)$ $\qquad R^3 = 27 \Rightarrow R = 3$

$\qquad 3\alpha = 60° + k \cdot 360° \Rightarrow \alpha = \frac{60° + k \cdot 360°}{3}$

Für $k = 0$ erhält man für α: $\alpha = \frac{60° + 0 \cdot 360°}{3} = 20°$

Für $k = 1$ erhält man für α: $\alpha = \frac{60° + 1 \cdot 360°}{3} = 140°$

Für $k = 2$ erhält man für α: $\alpha = \frac{60° + 2 \cdot 360°}{3} = 260°$

Für $k = 3$ erhält man für α: $\alpha = \frac{60° + 3 \cdot 360°}{3} = 380°$

Werte für $k \geq 3$ sind nicht sinnvoll, da α dann nicht mehr im Intervall $[0°; 360°[$ liegt.

Für $\sqrt[3]{(27; 60°)}$ erhält man also 3 Lösungen: $\zeta_0 = (3; 20°)$

$\zeta_1 = (3; 140°)$

$\zeta_2 = (3; 260°)$

Anmerkung: Der Wert für k= 0 wird als Hauptwert, die Werte für $k = 1$ bzw. $k = 2$ werden als Nebenwerte bezeichnet.

Allgemein gilt für die n-te Wurzel der komplexen Zahl $z = (r; \varphi)$:

$\zeta = \sqrt[n]{z} \Rightarrow \zeta^n = z$ $\qquad$ mit $\zeta = (R; \alpha)$ und $R \in \mathbb{R}^+, 0° \leq \alpha < 360°$

$(R; \alpha)^n = (r; \varphi + k \cdot 360°)$ $\qquad$ Ausrechnen der Potenz

$(R^n; n \cdot \alpha) = (r; \varphi + k \cdot 360°)$

$R^n = r \Rightarrow R = \sqrt[n]{r}$

$n \cdot \alpha = \varphi + k \cdot 360°$

$\alpha = \frac{\varphi + k \cdot 360°}{n}$ Mit $k < n$ ($k \geq n$ ist nicht sinnvoll, da α dann nicht mehr im Intervall $[0°; 360°[$ liegen würde).

$\zeta_k = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi + k \cdot 360°}{n}\right)$ „allgemeiner" Wurzelwert

Alle Werte für $\zeta = \sqrt[n]{z}$ erhält man, indem man für k die Werte von 0 bis n – 1 einsetzt:

$\zeta_0 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right)$ Hauptwert

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \left(\sqrt[n]{r}; \tfrac{\varphi + 360°}{n}\right) \\ \zeta_2 &= \left(\sqrt[n]{r}; \tfrac{\varphi + 2 \cdot 360°}{n}\right) \\ &\vdots \\ \zeta_{n-1} &= \left(\sqrt[n]{r}; \tfrac{\varphi + (n-1) \cdot 360°}{n}\right) \end{aligned}\right\} \text{Nebenwerte}$$

Die n-te Wurzel $\zeta = \sqrt[n]{z}$ einer komplexen Zahl $z = (r; \varphi)$

$\zeta_k = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi + k \cdot 360°}{n}\right)$ allgemeine Lösung

$\sqrt[n]{z}$ hat n Lösungen:

Für $k = 0$ erhält man den Hauptwert $\zeta_0 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right)$

Die $n-1$ Nebenwerte erhält man, indem man für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ einsetzt.

Anmerkung:

Ist der Winkel φ im Bogenmaß gegeben, so gilt für die allgemeine Lösung $\zeta_k = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$

Beispiel: Berechne

(a) $\sqrt[5]{z}$ mit $z = (32; 120°)$

$\zeta_k = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi + k \cdot 360°}{n}\right)$ Formel

$\zeta_k = \left(\sqrt[5]{32}; \frac{120° + k \cdot 360°}{5}\right)$ allgemeine Lösung

$k = 0: \quad \zeta_0 = (2; 24°)$ Hauptwert

$$\left.\begin{aligned} k = 1: &\quad \zeta_1 = (2; 96°) \\ k = 2: &\quad \zeta_2 = (2; 168°) \\ k = 3: &\quad \zeta_3 = (2; 240°) \\ k = 4: &\quad \zeta_4 = (2; 312°) \end{aligned}\right\} \text{Nebenwerte}$$

(b) $\sqrt[3]{z}$ mit $z = 3 - 2 \cdot i$

Verwandeln der Normalform in die Polarform:

$z = 3 - 2 \cdot i: \quad a = 3, b = -2$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad r = \sqrt{13} = 3{,}60..$

$\tan\varphi = \frac{b}{a} \qquad \varphi = -33{,}690..°$

$\varphi = -33{,}69°$

$(\varphi_1 = 326{,}31°) \vee (\varphi_2 = 146{,}31°)$

$z = (3{,}6..; 326{,}31°)$ z liegt im 4. Quadranten, da a = 3 und b = –2 gilt.

$\zeta_k = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi + k \cdot 360°}{n}\right)$ Formel

$\zeta_k = \left(\sqrt[3]{3{,}6..}; \frac{326{,}31° + k \cdot 360°}{3}\right)$ allgemeine Lösung

Ab 2014 wird in Österreich die standardisierte, kompetenzorientierte Reifeprüfung durchgeführt.

Diese neue Form der Matura, auf die bereits ab der 5. Klasse hingearbeitet wird, erfordert spezielle **Grundkompetenzen** und **vernetztes mathematisches Denken**, die mit diesem Buch perfekt erworben und trainiert werden können.

Mit **Mathematik positiv! 7** lernst du mit den **neuen Prüfungsformaten wie Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Interpretieren, Argumentieren** umzugehen.

Du kannst dich

- auf sämtliche Schularbeiten der 7. Klasse vorbereiten,
- dich für jede Prüfung fit machen,
- viele Beispiele üben und selbst kontrollieren!

Der Stoff des ganzen Schuljahres wird ausführlich erklärt und anhand von vielen **übersichtlichen Musterbeispielen** verständlich gemacht. Den Abschluss jedes Kapitels bildet ein Mindmap, das eine Übersicht über den Inhalt gibt. Es hilft, die vorkommenden Begriffe mit dem dazugehörenden mathematischen Wissen zu verbinden und die Zusammenhänge herzustellen.

Alle Übungsbeispiele sind im **Lösungsband Mathematik positiv! 7** (ISBN 978-3-7074-1685-5) durchgerechnet und mit Anleitungen versehen. Das ermöglicht Lösungswege zu kontrollieren, aber auch Fehler zu finden.

Mit Mathematik positiv! 7
kannst du mathematisches Wissen erwerben, erweitern sowie vertiefen und Mathematik besser verstehen!

www.ggverlag.at

978-3-7074-1684-8

€ 26,80

9 783707 416848