Wolfram Thorwartl • Günther Wagner • Helga Wagner

Mathematik positiv!

Neuausgabe für die Zentralmatura 2014

6. Klasse AHS

Österreichischer Lehrplan

www.ggverlag.at

ISBN 978-3-7074-1417-2

1. Auflage 2013

Printed by Brüder Glöckler, Wöllersdorf

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Mathematik positiv 6 deckt den gesamten Lehrstoff der 6. Klasse ab und bereitet dich auf die standardisierte und kompetenzorientierte Reifeprüfung (Zentralmatura) vor.
Zu Beginn jedes Kapitels werden die Grundkompetenzen angegeben.
Diese beschreiben den grundlegenden und unverzichtbaren Bereich des Lehrplans.
Die Theorie dazu wird verständlich vorgeführt, wichtige Sätze, Definitionen und Formeln werden hervorgehoben. Durch eine Fülle an Beispielen werden die Grundkompetenzen und deren Anwendungen aufgezeigt und dadurch nachvollziehbar.
Die zusätzlichen Übungsaufgaben sind in einem Lösungsband vollständig durchgerechnet und geben dir die Möglichkeit, selbstständig zu üben.

Wenn du dich für die Schularbeit oder für eine Prüfung vorbereitest, empfehlen wird dir, zunächst den Theorieteil zu lernen und dann mit dem Üben zu beginnen. In einem eigenen Abschnitt gibt es Fragen zu diesem Kapitel. Zur Kontrolle sind im Lösungsband jene Seiten angegeben, auf denen du die Antworten findest.
In einem neuen Prüfungsformat (z. B. Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Argumentieren, Begründen) werden auch viele Beispiele angegeben, welche die Grundkompetenzen mit Blickrichtung auf die zentrale Reifeprüfung in Mathematik ab dem Haupttermin 2014 festigen.

Kontrolliere jedes deiner Beispiele mit dem Lösungsheft, richtig gerechnete Beispiele geben dir Sicherheit für die Prüfungssituation.
Am Ende jedes Kapitels gibt es ein Mindmap, das die wichtigen Begriffe und Zusammenhänge visualisiert. Jeden vorkommenden Ausdruck solltest du mit den zugehörigen Inhalten des Kapitels verbinden können. So kannst du nochmals überprüfen, ob du den Lehrstoff beherrschst.

Viel Erfolg und dadurch Freude an der Mathematik wünschen dir die Autoren.

INHALTSANGABE

A Potenzen – Wurzeln

1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten 6
- Grundbegriffe – Rechenregeln 6
- Potenzieren von Potenzen 8
- Umformen von Polynomen in Potenzen von Binomen 11
- Division eines Polynom durch ein Polynom 12
- Zerlegung von Binomen mit gleich hohen Potenzen 14

2 Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten 17
- Rechenregeln 18
- Rechnen mit Zehnerpotenzen 20

3 Potenzen mit rationalen Zahlen als Exponenten 24
- Begriff der Wurzel 24
- Potenzschreibweise von Wurzeln 25
- Berechnen mit dem Taschenrechner 27
- Rechneregeln für Wurzeln bzw. Potenzen mit rationalen Exponenten 27
- Partielles Wurzelziehen 30
- Rationalmachen des Nenners 31

4 Potenzen mit reellen Zahlen als Exponenten 35

5 Potenzfunktion – Wurzelfunktion 36
- Potenzfunktion 36
- Wurzelfunktion 42

6 Wurzelgleichungen 43
- Lösen von Wurzelgleichungen 43

B Ungleichungen mit einer Variablen

1 Begriff der Ungleichung 53
- Grundbegriffe 53

2 Lösen von linearen Ungleichungen mit einer Variablen 54
- Eine lineare Ungleichung mit einer Variablen 54
- Systeme von linearen Ungleichungen mit einer Variablen 55
- Bruchungleichungen 57

3 Betragsungleichungen 61

4 Quadratische Ungleichungen 63

C Folgen und Reihen

1 Folgen 69
- Definition 69
- Festlegen einer Folge 69
- Besondere Folgen 72
- Monotonie von Folgen 80
- Schranken von Folgen 82
- Grenzwert – konvergente Folgen 85
- Berechnung von Grenzwerten – Grenzwertsätze 89
- Graphische Veranschaulichung der Eigenschaften von Folgen 91

2 Reihen 93
- Endliche Zahlenreihen 93
- Unendliche geometrische Reihen 99

3 Vollständigkeit der reellen Zahlen 103

D Exponentialfunktion – Logarithmus, Logarithmusfunktion

1 Exponentialfunktion 110
- Definition und Eigenschaften 110
- Die Euler'sche Zahl 111

2 Logarithmus 113
- Definition 113
- Das Rechnen mit Logarithmen 114
- Zusammenhang zwischen den Logarithmen einer Zahl bezüglich verschiedener Basen 115

3 Logarithmusfunktion 116

4 Exponentialgleichungen – Logarithmische Gleichungen 117
- Exponentialgleichungen 117
- Logarithmische Gleichungen 119

E Reelle Funktionen

1 Definition 128

2 Eigenschaften von reellen Funktionen 128
- Nullstellen, Monotonie, Extremstellen 128
- Näherungsweises Lösen von Gleichungen 129
- Gerade und ungerade Funktion 132
- Stetigkeit, Sprungstelle, Definitionslücke, isolierter Punkt 132
- Verhalten im Unendlichen 134

3 Beispiele für reelle Funktionen 137
- Winkelfunktionen 138
- Harmonische Schwingungen 146

F Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme mit drei Variablen

1 Eine lineare Gleichung mit drei Variablen 158

2 System von zwei linearen Gleichungen mit drei Variablen 159

3 System von drei linearen Gleichungen mit drei Variablen 161
- Lösen eines Systems von drei linearen Gleichungen mit drei Variablen 161

G Wachstumsprozesse

1 Änderung von Größen 166
Diskrete Änderung 166
Kontinuierliche Änderung 167
2 Änderungsmaße 167
Differenz als Maß der Änderung – absolute Änderung 167
Mittlere Änderungsrate – Differenzenquotient 168
Relative Änderung – prozentuelle Änderung 168
Änderungsfaktor 168
Zusammenfassung der Änderungsmaße 169
3 Lineares Wachstum 170
4 Exponentielles Wachstum 173
Diskretes exponentielles Wachstum 173
Kontinuierliches exponentielles Wachstum 174
5 Beschränktes Wachstum 180
6 Logistisches Wachstum 182
7 Anwendungen im Geldwesen 186
Zinseszinsrechnung 186
Regelmäßige Zahlungen 187

H Vektorrechnung

1 Der Vektor im Raum 195
Rechnen mit Vektoren 196
Abtragen und Teilen von Strecken 200
2 Skalares Produkt 203
Definition des skalaren Produkts 203
Anwenden des skalaren Produkts 204
3 Vektorielles Produkt 208
Bestimmung des Normalvektors 208
Definition des vektoriellen Produkts 209
Anwendungen des Vektorprodukts 212
4 Parameterdarstellung von Geraden 217
Geradengleichung im $\mathbb{R}^3$ 217
Lagebeziehung von Geraden im $\mathbb{R}^3$ 218
5 Ebene – Ebenengleichung 223
Parameterdarstellung einer Ebene 223
Parameterfreie Form der Ebenengleichung – Normalvektorform 226
Lageziehung zwischen Gerade und Ebene 228
Lagebeziehung zwischen Ebenen 231
6 Abstandsberechnungen 238
Abstandberechnungen mit Hilfe der vektoriellen Projektion
Hesse'sche Abstandsformel 238
7 Anwendung der Vektorrechnung 242

I Statistik und Wahrscheinlichkeit

1 Grundbegriffe der Statistik 254
2 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung 263
3 Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs 266
Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil 266
Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit 269
Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen 270
4 Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten 270
Darstellung von Experimenten mit Hilfe von Zufallsgeräten 270
Geordnete Stichproben – 1. Pfadregel 271
Ungeordnete Stichproben – 2. Pfadregel 273
5 Grundbegriffe der Kombinatorik 276
Variationen – Geordnete Stichproben 276
Kombinationen – Ungeordnete Stichproben 278
6 Bedingte Wahrscheinlichkeit 285
Definitionen 285
Additionssatz, Multiplikationssatz für Ereignisse 289
Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit 293
Satz von Bayes 294

A. POTENZEN – WURZELN

Potenzen spielen in der Mathematik eine große Rolle. Man kann sie zum Beispiel für die Darstellung von sehr großen bzw. sehr kleinen Zahlen verwenden. Potenzen werden auch als Grundlage für das Rechnen in den Naturwissenschaften angewandt.

GRUNDKOMPETENZEN – Erweiterte KOMPETENZEN

Du wirst in diesem Kapitel
- ⇨ Potenzen mit natürlichen, ganzen, rationalen bzw. reellen Exponenten kennenlernen
- ⇨ Rechenregeln für Potenzen herleiten und anwenden
- ⇨ Definitionen der Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten kennenlernen
- ⇨ den Zusammenhang zwischen Potenz- und Wurzelschreibweise erkennen
- ⇨ mit der Potenzfunktion und der Wurzelfunktion arbeiten
- ⇨ Wurzelgleichungen lösen

1 Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten

Grundbegriffe – Rechenregeln

Potenz

Ein Ausdruck der Form a^n mit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ heißt Potenz.

a … Basis (Grundzahl), n … Exponent (Hochzahl)

Für das Rechnen mit Potenzen kennen wir die folgenden Rechenregeln:

Addition und Subtraktion

Es können nur gleiche Potenzen (gleiche Basis und gleicher Exponent) addiert und subtrahiert werden.

Beispiel: Berechne!

(a) $7a^3 + 5a^2 - a + 4a^2 - 9a^3 + 2a =$
$= -2a^3 + 9a^2 + a$

(b) $3x^2y - 5xy^2 + x^2y - 8xy^2 =$
$= 4x^2y - 13xy^2$

Gleiche Potenzen werden zusammengefasst, indem man die Koeffizienten addiert bzw. subtrahiert.

Multiplikation

Potenzen der **gleichen Basis** werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert, die Basis bleibt gleich.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad a \in \mathbb{R};\ r, s \in \mathbb{N}^*$$

Beispiel: Berechne!

(a) $x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$

(b) $4a^2b \cdot 2ab^4 = 4 \cdot 2 \cdot a^{2+1} \cdot b^{1+4} = 8a^3b^5$

Division

Zwei Potenzen **derselben Basis** werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert, die Basis bleibt gleich.

$$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Dabei ergeben sich folgende Fälle für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $r, s \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{a^r}{a^s} = \begin{cases} a^{r-s} & \text{wenn } r > s \\ 1 & \text{wenn } r = s \\ \frac{1}{a^{s-r}} & \text{wenn } r < s \end{cases}$$

Beispiel: Berechne!

(a) $\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$

(b) $\frac{y^3}{y^3} = y^{3-3} = y^0 = 1$

(c) $\frac{z^2}{z^6} = \frac{\cancel{z} \cdot \cancel{z}}{\cancel{z} \cdot \cancel{z} \cdot z \cdot z \cdot z} = \frac{1}{z^4}$ bzw.: $\frac{z^2}{z^6} = \frac{1}{z^{6-2}} = \frac{1}{z^4}$

Beachte folgende **Sonderfälle**

$a^1 = a$

$a^0 = 1$ Man kann $\frac{a^n}{a^n}$ auf zwei Arten berechnen:

Bruch kürzen: $\frac{\overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}^{\text{n-mal}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{\text{n-mal}}} = 1$

Anwenden der Formel. $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \Rightarrow a^0 = 1$

Es muss also $a^0 = 1$ gelten.

$1^n = 1$ Jede Potenz von 1 ist wieder 1.

$0^n = 0$ Jede Potenz von 0 $\left(0^n \text{ mit } n \in \mathbb{N}^*\right)$ ist wieder 0.

0^0 ist kein mathematisch sinnvoller Ausdruck.

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichen Exponenten

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen potenziert.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$$

Anwendung: z. B. vorteilhaftes Rechnen

$$4^2 \cdot 25^2 = (4 \cdot 25)^2 = 100^2 = 10\,000$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man den aus den Basen gebildeten Quotienten potenziert.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0; n \in \mathbb{N}^*$$

Anwendung: z. B. vorteilhaftes Rechnen

$$\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27$$

Potenzieren einer Potenz

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

$$\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \quad a \in \mathbb{R}; r, s \in \mathbb{N}^*$$

Es gilt $\left(a^r\right)^s = \left(a^s\right)^r = a^{r \cdot s}$

Beispiel: Berechne!

(a) $\left(2^3\right)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

(b) $\left(y^5\right)^3 = y^{5 \cdot 3} = y^{15}$

Potenzieren eines Produkts

Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$$

Beispiel: Berechne!

(a) $(x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3$

(b) $\left(2r^2s^3\right)^4 = 2^4 \cdot \left(r^2\right)^4 \cdot \left(s^3\right)^4 = 2^4 \cdot r^{2 \cdot 4} \cdot s^{3 \cdot 4} = 16r^8s^{12}$

Potenzieren eines Quotienten

Ein Quotient wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n \in \mathbb{N}^*$$

Beispiel: Berechne!

(a) $\left(\frac{u}{v}\right)^2 = \frac{u^2}{v^2}$

(b) $\left(\frac{2x^2}{y}\right)^3 = \frac{\left(2x^2\right)^3}{y^3} = \frac{2^3 \cdot \left(x^2\right)^3}{y^3} = \frac{2^3 \cdot x^{2 \cdot 3}}{y^3} = \frac{8x^6}{y^3}$

Gerade und ungerade Potenzen

Potenzen deren Exponenten gerade Zahlen sind, heißen
gerade Potenzen: a^{2n} für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Potenzen deren Exponenten ungerade Zahlen sind, heißen
ungerade Potenzen: a^{2n+1} für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Beachte:

Der Wert jeder geraden Potenz ist stets positiv: $(+a)^{2n} = a^{2n}$ bzw. $(-a)^{2n} = a^{2n}$

Der Wert einer ungeraden Potenz ist
- positiv, wenn die Basis positiv ist: $(+a)^{2n+1} = a^{2n+1}$
- negativ, wenn die Basis negativ ist: $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

Beispiel: Berechne!

(a) $(-1)^{2n} = 1^{2n} = 1$

(b) $(-1)^{2n+1} = -1^{2n+1} = -1$

(c) $(+1)^{2n+1} = 1^{2n+1} = 1$

(d) $(-3)^4 = 3^4 = 81$

(e) $(-2)^5 = -2^5 = -32$

(f) $(+5)^3 = 5^3 = 125$

Beispiel: Ergänze!

	Basis < 0	Basis > 0	gerade Potenz	ungerade Potenz	Ergebnis
$(-3)^2$	✓		✓		9
$(-1)^3$	✓			✓	-1
2^4		✓	✓		16
$(-5)^3$	✓			✓	-125
$(-1)^1$	✓			✓	-1
$(-1)^2$	✓		✓		1
7^2		✓	✓		49

Potenzieren von Binomen – PASCAL´SCHES Dreieck

Das Potenzieren von Binomen kann auf eine Multiplikation von Polynomen zurückgeführt werden. Dadurch entstehen einzelne Formeln (**Binomische Formeln**) für das Rechnen mit Potenzen.

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)}\cdot(a+b) = \\ &= (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= \underbrace{(a-b)\cdot(a-b)}\cdot(a-b) = \\ &= (a^2-2ab+b^2)\cdot(a-b) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Für das Berechnen des Quadrats bzw. der dritten Potenz eines Binoms gelten folgende Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Beispiel: Berechne!

(a) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 =$ Anwenden der Formel

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

(b) $\left(\frac{1}{2}x - 4y\right)^3 = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)^2\cdot 4y + 3\cdot\frac{1}{2}x\cdot(4y)^2 - (4y)^3 =$

$= \frac{1}{8}x^3 - 3\cdot\frac{1}{4}x^2\cdot 4y + 3\cdot\frac{1}{2}x\cdot 16y^2 - 64y^3 =$

$= \frac{1}{8}x^3 - 3x^2y + 24xy^2 - 64y^3$

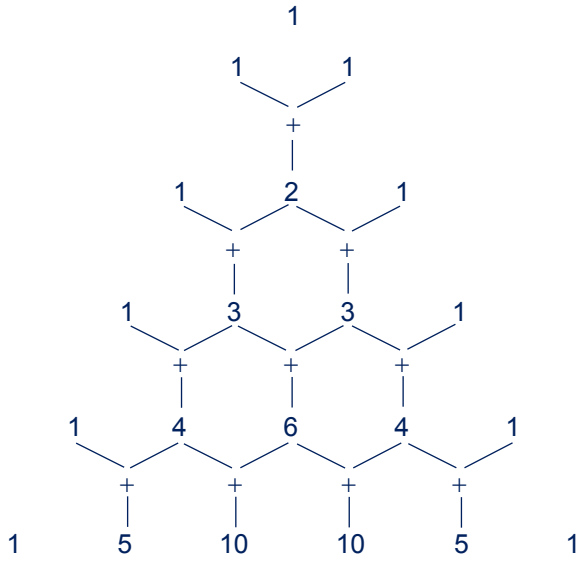
Auch für Potenzen von Binomen höherer Ordnung erhält man durch Multiplikation Formeln.

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = \\ &= (a^2+2ab+b^2)\cdot(a^2+2ab+b^2) = \ldots \Rightarrow \text{Formel}\end{aligned}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Weniger aufwendig ist das Potenzieren von Binomen, wenn man die folgenden Gesetzmäßigkeiten kennt:

		Koeffizienten
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$1\cdot a+1\cdot b$	1 1
$(a+b)^2$	$1\cdot a^2+2\cdot ab+1\cdot b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$1\cdot a^3+3\cdot a^2b+3\cdot ab^2+1\cdot b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$1\cdot a^4+4\cdot a^3b+6\cdot a^2b^2+4\cdot ab^3+1\cdot b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$1\cdot a^5+5\cdot a^4b+10\cdot a^3b^2+10\cdot a^2b^3+5\cdot ab^4+1\cdot b^5$	1 5 10 10 5 1



Diese Anordnung der Koeffizienten wird Pascal´sches Dreieck genannt. Die Koeffizienten erhält man durch Addition der darüberstehenden Zahlen

Für das Produkt der Variablen der einzelnen Summanden gilt:
Die Potenzen des 1. Summanden a sind nach fallenden, die des 2. Summanden b nach steigenden Exponenten geordnet. Die Summe der Exponenten beider Variablen in jedem einzelnen Produkt ist immer gleich dem Exponenten des Binoms.

z. B.: $(a+b)^4$

Die Koeffizienten erhält man durch das Pascal´sche Dreieck 1 4 6 4 1

Für die Produkte der Variablen gilt:

Die Potenzen von a fallen	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0
Die Potenzen von b steigen	b^0	b^1	b^2	b^3	b^4
Produkte	$a^4\cdot b^0$	$a^3\cdot b^1$	$a^2\cdot b^2$	$a^1\cdot b^3$	$a^0\cdot b^4$
	a^4	a^3b	a^2b^2	ab^3	b^4

Man erhält also die Formel:

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4+4\cdot a^3b+6\cdot a^2b^2+4\cdot ab^3+1\cdot b^4 =$$
$$= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Anmerkung: Wird die Differenz $a-b$ potenziert, so erhält man die Koeffizienten und Produkte in gleicher Weise. Die Rechenzeichen zwischen den einzelnen Gliedern sind abwechselnd $+$ und $-$ (das Rechenzeichen alterniert), weil die ungeraden Potenzen von b ein negatives Vorzeichen haben.

z. B.: $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

Beispiel: Berechne mit Hilfe des Pascal´schen Dreiecks $(x+y)^7$!

Ermitteln der Koeffizienten

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Koeffizienten von $(x+y)^7$

Potenzen von x	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Potenzen von y	y^0	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6	y^7
Produkte	x^7y^0	x^6y^1	x^5y^2	x^4y^3	x^3y^4	x^2y^5	x^1y^6	x^0y^7

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

Beispiel: Berechne folgende Potenzen!

(a) $(3x+2y)^5$

Aus dem Pascal´schen Dreieck folgt:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\begin{aligned}(3x+2y)^5 &= (3x)^5 + 5\cdot(3x)^4\cdot 2y + 10\cdot(3x)^3\cdot(2y)^2 + 10\cdot(3x)^2\cdot(2y)^3 + 5\cdot 3x\cdot(2y)^4 + (2y)^5 = \\ &= 3^5x^5 + 5\cdot 3^4x^4\cdot 2y + 10\cdot 3^3x^3\cdot 2^2y^2 + 10\cdot 3^2x^2\cdot 2^3y^3 + 5\cdot 3x\cdot 2^4y^4 + 2^5y^5 = \\ &= 243x^5 + 810x^4y + 1080x^3y^2 + 720x^2y^3 + 240xy^4 + 32y^5\end{aligned}$$

(b) $(x-3y)^4$

Aus dem Pascal´schen Dreieck folgt:

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$\begin{aligned}(x-3y)^4 &= x^4 - 4\cdot x^3\cdot 3y + 6\cdot x^2\cdot(3y)^2 - 4\cdot x\cdot(3y)^3 + (3y)^4 = \\ &= x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4\end{aligned}$$

Umformen von Polynomen in Potenzen von Binomen

Trinome der Form $a^2+2ab+b^2$ bzw. $a^2-2ab+b^2$ sind **vollständige Quadrate**. Diese lassen sich als Quadrat einer Summe bzw. einer Differenz darstellen.

$$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 \quad \text{bzw.} \quad a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$$

Beispiel: Schreibe folgende Polynome, wenn möglich, als Potenzen von Binomen an!

(a) $9x^2+12xy+4y^2 =$

Untersuchen, ob ein vollständiges Quadrat vorliegt.
$9x^2 = (3x)^2$ und $4y^2 = (2y)^2$
außerdem gilt: $2\cdot 3x\cdot 2y = 12xy$ w. A.
Es liegt ein vollständiges Quadrat vor.

$= (3x+2y)^2$

(b) $8x^2-8xy+2y^2 =$

Herausheben des gemeinsamen Faktors 2.

$= 2\cdot(4x^2-4xy+y^2) =$

Untersuchen, ob ein vollständiges Quadrat vorliegt.
$4x^2 = (2x)^2;\ y^2 = (y)^2;\ 2\cdot 2x\cdot y = 4xy$ w. A.
Es liegt ein vollständiges Quadrat vor.

$= 2\cdot(2x-y)^2$

(c) $0{,}25x^2 - xy + 4y^2 =$

$0{,}25x^2 = (0{,}5x)^2;\ 4y^2 = (2y)^2;$
$2 \cdot 0{,}5x \cdot 2y = 2xy$, aber $2xy \neq xy$
Es liegt kein vollständiges Quadrat vor.

Man kann das Trinom nicht als Potenz eines Binoms anschreiben.

(d) $-9x^2 + 24xy - 16y^2 =$

Durch Herausheben von (-1) erhält man ein Trinom, dessen quadratische Glieder positive Vorzeichen haben.

$= (-1) \cdot (9x^2 - 24xy + 16y^2) =$

$9x^2 = (3x)^2;\ 16y^2 = (4y)^2;\ 2 \cdot 3x \cdot 4y = 24xy$ w. A.
Es liegt ein vollständiges Quadrat vor.

$= (-1) \cdot (3x - 4y)^2$

(e) $4x^2 - 12xy - 9y^2$

Da die quadratischen Glieder verschiedene Vorzeichen haben, kann dieses Trinom kein vollständiges Quadrat sein.

(f) $4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4 =$

$4x^4 = (2x^2)^2;\ 9y^4 = (3y^2)^2;$
$2 \cdot 2x^2 \cdot 3y^2 = 12x^2y^2$ w. A.
Es liegt ein vollständiges Quadrat vor.

$= (2x^2 - 3y^2)^2$

Division eines Polynoms durch ein Polynom

Vergleiche auch Mathematik positiv, 5. Klasse, Kapitel C. Terme und Formeln.

Beispiel: Berechne!

$$(a^4 - 12a^3 + 36a^2) : (a - 6) = a^3 - 6a^2$$

$$\begin{array}{rrr} a^4 & -\ 6a^3 & \\ - & + & \\ \hline & -\ 6a^3 & +36a^2 \\ & -\ 6a^3 & +36a^2 \\ & + & - \\ \hline & 0 & 0 \end{array}$$

1. Man dividiert das erste Glied des Dividenden a^4 durch das erste Glied des Divisors a.
   (Womit muss man a multiplizieren, um a^4 zu erhalten? … mit a^3)
2. Mit dem ersten Glied des Quotienten wird der Divisor multipliziert. Diese Teilprodukte werden unter dem Dividenden so angeschrieben, dass gleiche Potenzen untereinander stehen.
3. Das Teilprodukt wird vom Dividenden subtrahiert. Dabei ändert man die Vorzeichen und addiert. Der erhaltene Rest wird angeschrieben.
4. Dann wird das nächste Glied $(+36a^2)$ herabgeschrieben.
5. Jetzt beginnt man wieder mit dem ersten Schritt.
6. Definitionsbereich für a:
   $a \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$

$a - 6 = 0$
$a \neq 6$

Probe:

$(a - 6) \cdot (a^3 - 6a^2) =$
$= a^4 - 6a^3 - 6a^3 + 36a^2 =$
$= a^4 - 12a^3 + 36a^2$

Beispiel: Berechne!

$$\left(a^5 \qquad + b^5\right):(a+b) = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$$

$$\begin{array}{l}
a^5 + a^4b \\
- \quad - \\
\hline
\quad -a^4b \qquad + b^5 \\
\quad -a^4b - a^3b^2 \\
\quad + \quad + \\
\hline
\qquad +a^3b^2 \qquad + b^5 \\
\qquad +a^3b^2 + a^2b^3 \\
\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\quad -a^2b^3 \qquad + b^5 \\
\qquad\quad -a^2b^3 - ab^4 \\
\qquad\quad + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad +ab^4 + b^5 \\
\qquad\qquad +ab^4 + b^5 \\
\qquad\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \quad \text{Rest}
\end{array}$$

Beachte: b^5 kann erst in der letzten Teildivision berücksichtigt werden.

Definitionsmenge
$a + b \neq 0 \Rightarrow a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq -b$

Zur Kontrolle kann man eine Probe durch Multiplikation durchführen.

$$\begin{array}{ll}
\left(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4\right)\cdot(a+b) & \\
a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 & \text{Multiplikation mit a} \\
\quad + a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 + b^5 & \text{Multiplikation mit b} \\
\hline
a^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b^5 &
\end{array}$$

Um sich die Addition der Teilprodukte zu erleichtern, werden entsprechende Potenzen untereinandergeschrieben.

Beispiel: Berechne!

$$\left(16x^3 - 7x^4 + 10x + 2x^5 - 16x^2 + 1\right):\left(4 + x^2 - 2x\right)$$

Zuerst ordnet man Dividend und Divisor nach fallenden Potenzen von x

$$\left(2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 10x + 1\right):\left(x^2 - 2x + 4\right) = 2x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$\begin{array}{l}
2x^5 - 4x^4 + 8x^3 \\
- \quad + \quad - \\
\hline
\quad -3x^4 + 8x^3 - 16x^2 \\
\quad -3x^4 + 6x^3 - 12x^2 \\
\quad + \quad - \quad + \\
\hline
\qquad + 2x^3 - 4x^2 + 10x \\
\qquad + 2x^3 - 4x^2 + 8x \\
\qquad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 2x + 1 \quad \text{Rest}
\end{array}$$

x^2 ist in 2x nicht enthalten, daher bleibt 2x + 1 als Rest bezüglich der Division durch $x^2 - 2x + 4$

Es gilt:

$$\left(2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 10x + 1\right):\left(x^2 - 2x + 4\right) =$$

$$= \Big[\underbrace{\left(2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 8x\right)}_{\substack{\text{Polynom} \\ \text{vermindert um das Restpolynom}}} + \underbrace{(2x+1)}_{\text{Restpolynom}}\Big]:\left(x^2 - 2x + 4\right) =$$

$$= \underbrace{\left(2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 8x\right):\left(x^2 - 2x + 4\right)}_{2x^3 - 3x^2 + 2x} + \underbrace{(2x+1):\left(x^2 - 2x + 4\right)}_{\frac{2x+1}{x^2-2x+4}} =$$

$$\left(2x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 10x + 1\right):\left(x^2 - 2x + 4\right) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{2x+1}{x^2-2x+4}$$

Zur Kontrolle führt man eine Probe durch Multiplikation aus.

$$\begin{array}{l} \left(x^2-2x+4\right)\cdot\left(2x^3-3x^2+2x\right) \\ \hline 2x^5-4x^4+8x^3 \\ \quad -3x^4+6x^3-12x^2 \\ \qquad\qquad 2x^3-4x^2+8x \\ \hline 2x^5-7x^4+16x^3-16x^2+8x \end{array}$$

$$\begin{aligned} &2x^5-7x^4+16x^3-16x^2+8x+2x+1= \\ &=2x^5-7x^4+16x^3-16x^2+10x+1 \qquad \text{w. A.} \end{aligned}$$

Zerlegung von Binomen mit gleich hohen Potenzen

Bei manchen Binomen kann man durch Zerlegung die Termstruktur ändern.

z. B.: $\underbrace{a^2-b^2}_{\text{Differenz}} = \underbrace{(a-b)\cdot(a+b)}_{\text{Produkt}}$

Beispiel: Zerlege folgende Terme!

(a) $9x^2-16y^2=$ — Anwenden der Formel für die Zerlegung der Differenz zweier Quadrate $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$

$=(3x)^2-(4y)^2=$

$=(3x-4y)\cdot(3x+4y)$

(b) $\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^4=$ — $\frac{1}{9}a^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2 \qquad \frac{1}{4}b^4=\left(\frac{1}{2}b^2\right)^2$

$=\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b^2\right)$

(c) $4x-64x^3=$ — Herausheben

$=4x\cdot\left(1-16x^2\right)=$ — Zerlegung nach der Formel $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$

$=4x\cdot\left[(1)^2-(4x)^2\right]=$

$=4x\cdot(1-4x)\cdot(1+4x)$

Alle Differenzen bzw. Summen von Monomen mit gleich hohen ungeraden Exponenten lassen sich zerlegen:

Differenzen:

$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$

$a^5-b^5=(a-b)\cdot\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$ usw.

Es lässt sich immer der Faktor a – b herausheben. Im Restpolynom sind die Potenzen nach fallenden Exponenten von a $\left(\text{z. B.: } \underline{a}^4+\underline{a^3}b+\underline{a^2}b^2+\ldots\right)$ bzw. nach steigenden Exponenten von b $\left(\text{z. B.: } a^4+a^3\underline{b}+a^2\underline{b^2}+\ldots\right)$ geordnet. Die Rechenzeichen sind alle positiv.

Summen:

$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$

$a^5+b^5=(a+b)\cdot\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)$ usw.

Es lässt sich immer der Faktor a + b herausheben. Im Restpolynom sind die Potenzen nach steigenden Exponenten von a bzw. fallenden Exponenten von b geordnet. Die Rechenzeichen sind alternierend.

Diese Zerlegungen lassen sich alle durch Multiplikation überprüfen. Durch Division können diese Zerlegungen hergeleitet werden.

Beispiel: Zerlege das Binom $x^3 + y^3$ auf zwei Arten!

$x^3 + y^3 = (x+y)\cdot(x^2 - xy + y^2)$ 1. Anwenden der Formel

$(x^3 \quad + y^3) : (x+y) = x^2 - xy + y^2$ 2. Division

$$\begin{array}{l}
x^3 + x^2y \\
\underline{-\quad -} \\
\quad -x^2y \qquad + y^3 \\
\quad -x^2y - xy^2 \\
\quad \underline{+\quad +} \\
\qquad\quad +xy^2 \quad + y^3 \\
\qquad\quad +xy^2 \quad + y^3 \\
\qquad\quad \underline{-\qquad -} \\
\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

Beispiel: Zerlege folgende Binome!

(a) $32 - y^5 = 2^5 - y^5 =$ Anwenden der Formel

$= (2-y)\cdot(2^4 + 2^3\cdot y + 2^2\cdot y^2 + 2\cdot y^3 + y^4) =$

$= (2-y)\cdot(16 + 8y + 4y^2 + 2y^3 + y^4)$

(b) $\frac{x^3}{27} + y^3 = \left(\frac{x}{3}\right)^3 + y^3 =$

$= \left(\frac{x}{3} + y\right)\cdot\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \frac{x}{3}\cdot y + y^2\right] =$

$= \left(\frac{x}{3} + y\right)\cdot\left(\frac{x^2}{9} - \frac{xy}{3} + y^2\right)$

(c) $r^4 - 0{,}008rs^3 = r\cdot(r^3 - 0{,}008s^3) =$

$= r\cdot(r - 0{,}2s)\cdot\left[r^2 + r\cdot 0{,}2s + (0{,}2s)^2\right] =$

$= r\cdot(r - 0{,}2s)\cdot(r^2 + 0{,}2rs + 0{,}04s^2)$

Alle Differenzen von Monomen mit gleich hohen geraden Exponenten lassen sich mit Hilfe der Formel $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ zerlegen:

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 =$

$= (a^2 - b^2)\cdot(a^2 + b^2) =$

$= (a-b)\cdot(a+b)\cdot(a^2 + b^2)$ $\quad (a^2 + b^2)$ lässt sich nicht weiter zerlegen.

Für die Zerlegung der Summen von Monomen mit gleich hohen geraden Exponenten gilt:

(a) Ist der Exponent eine Potenz von 2 (2, 4, 8, 16..), so lässt sich das Binom nicht zerlegen.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 \\ a^4 + b^4 \\ a^8 + b^8 \qquad \text{usw.} \end{array}\right\} \text{ nicht zerlegbar}$$

(b) Ist der Exponent keine Potenz von 2, so lässt sich das Binom zerlegen.

z. B. $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 =$

$= (a^2 + b^2)\cdot\left[(a^2)^2 - a^2\cdot b^2 + (b^2)^2\right] =$

$= (a^2 + b^2)\cdot\left[a^4 - a^2b^2 + b^4\right]$

Beispiel: Zerlege folgende Binome!

(a) $625x^4 - 1 =$ $\quad 625 = 5^4;\ 1 = 1^4$

$= (5x)^4 - 1^4 = \left[(5x)^2 - 1\right]\cdot\left[(5x)^2 + 1\right] =$

$= (5x-1)\cdot(5x+1)\cdot(25x^2 + 1)$

(b) $64x^6 + y^6 =$

$$= (2x)^6 + y^6 = \left[(2x)^2\right]^3 + \left(y^2\right)^3 =$$
$$= \left(4x^2\right)^3 + \left(y^2\right)^3 =$$
$$= \left(4x^2 + y^2\right)\cdot\left[\left(4x^2\right)^2 - 4x^2\cdot y^2 + \left(y^2\right)^2\right] =$$
$$= \left(4x^2 + y^2\right)\cdot\left(16x^4 - 4x^2y^2 + y^4\right)$$

Übungsbeispiele

1 Berechne!

(a) 3^4 (b) $(-5)^3$ (c) $(-3)^4$ (d) $0{,}3^3$ (e) $(-1{,}2)^2$ (f) $3{,}2^3$

(g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ (h) $\left(-1\frac{2}{5}\right)^2$ (i) $\left(\frac{5}{2}\right)^3$ (j) $\frac{2^3}{3^2}$ (k) $\frac{(-4)^3}{5}$ (l) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

2 Berechne!

(a) $(-2)^4$ (b) -2^4 (c) $(-4)^3$ (d) -5^3 (e) $(-a)^2$ (f) $(-a)^5$

3 Berechne!

(a) $a^3\cdot a^4$ (b) $b^2\cdot b^6$ (c) $x^2y^2\cdot xy^2$ (d) $(-u)^3\cdot(-v)^6\cdot u^2$

(e) $9^7 : 9^5$ (f) $(-2)^8 : (-2)^3$ (g) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^3$ (h) $(-5)^5 : 5^2$

4 Berechne!

(a) $a^{n+1}\cdot a^{2n}\cdot a^3$ (b) $b^{n-1}\cdot b^2\cdot b^{2n-1}$ (c) $x^{2n-1}\cdot y^{2n}\cdot x^{2n+1}\cdot y$

(d) $u^{2+n}v^{n+1}\cdot u^{1-n}v^{2n+3}$ (e) $a^7 : a^5$ (f) $(-x)^9 : x^4$

(g) $\left(-\frac{1}{b}\right)^4 : \left(\frac{1}{b}\right)^2$ (h) $u^{2n+1} : u^{2n+1}$ (i) $a^3 : a^7$

5 Berechne!

(a) $(a+b)^{2+n}\cdot(a+b)^{3n+1}$ (b) $(x-y)^{2a}\cdot(x-y)^{b-3}\cdot(x-y)^{a-b}$

6 Berechne!

(a) $\frac{15a^4b^2}{-3a^3b}$ (b) $\frac{-128x^7y^5z^3}{64x^2y^3z^5}$ (c) $\frac{36\cdot(a-b)^4\cdot(x+y)}{24\cdot(a-b)^3}$ (d) $\frac{48\cdot(x-y)^4\cdot(x+y)^2}{120\cdot\left(x^2-y^2\right)}$

7 Berechne!

(a) $\left(x^4\right)^4$ (b) $\left(-y^3\right)^2$ (c) $\left(3x^3\right)^2$

(d) $\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^5$ (e) $\left(\frac{2}{5}a^2\right)^3$ (f) $\left(\frac{-x^2y}{3z^3}\right)^3$

8 Berechne!

(a) $\left[\frac{3^2}{2^3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{7}{(-3)^2}\right]\cdot(-3)^2$ (b) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^2 : \frac{9}{5}$

(c) $\frac{\left(-a^2b\right)^3}{x^2y}\cdot\left[\frac{x^2y^3}{ab} : \frac{y}{b^2}\right]^2$ (d) $\left(\frac{a-b}{x+y}\right)^3 : \left(\frac{a-b}{x^2-y^2}\right)^2$

9 Führe folgende Divisionen bezüglich der Grundmenge $\mathbb{R}$ aus!

(a) $\left(12x^3 - 29x^2y + 30xy^2 - 25y^3\right) : \left(3x - 5y\right)$

(b) $\left(5a^4 - 7a^3b + 5a^3b^2 - 7a^2b^3 + ab^3 + b^5\right) : \left(5a^3 - 7a^2b + b^3\right)$

(c) $\left(37x^3 - 11x^4 + 42x + 3x^5 - 18 - 32x^2\right) : \left(9 + x^2 - 3x\right)$

(d) $\left(6x^4 - 7x^3y - 2xy^3 + 2x^2y^2 + xy + y^4\right) : \left(2x - y\right)$

10 Zerlege!

(a) $25x^2 - 16y^2 =$ (b) $x^3 - \frac{1}{8}y^3 =$ (c) $\frac{1}{81}a^4 - 1 =$

(d) $2x^4 + 54x =$ (e) $a^{2m} - b^{2m} =$ (f) $a^{3m} + b^{3m} =$

11 Die Erde ist rund 150 Millionen km von der Sonne entfernt. Wie viele

(a) Erdkugeln (Erdradius 6 370 km)

(b) Kugeln von der Größe der Sonne (mittlerer Durchmesser $1{,}3914 \cdot 10^6$ km)

muss man aneinanderreihen, damit man diese Entfernung erreicht?

12 Die durchschnittliche Dichte der Erde beträgt 5,5 g/cm^3. Wie viele Menschen mit einer Masse von 70 kg entsprechen der Masse der Erde?

13 Für ein Foto mit einer digitalen Kamera werden bei hoher Auflösung 2,75 MB Datenspeicher benötigt. Wie viele Fotos können auf einer Speicherkarte mit (a) 2 GB (b) 16 GB Datenvolumen gespeichert werden?

2 Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten

Für Potenzen mit ganzen Zahlen als Exponenten und Potenzen mit positiven ganzen Zahlen als Exponenten wird folgender Zusammenhang definiert:

Potenzen mit negativem Exponenten

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}^*$

Diese Definition erscheint sinnvoll, wenn man folgendes Beispiel betrachtet.
Dabei berechnet man $2^2 : 2^5$ auf 2 Arten:

1. Art: $2^2 : 2^5 = 2^{2-5} = 2^{-3}$ $a^r : a^s = a^{r-s}$ Rechengesetz

2. Art $2^2 : 2^5 = \frac{2^2}{2^5} = \frac{1}{2^3}$ Kürzen

$\Rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Beispiel: Berechne den Wert folgender Potenzen!

(a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ (b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(c) $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ (d) $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

Beispiel: Stelle die gegebenen Terme mit positiven Exponenten dar!

(a) $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$ (b) $2x^{-4} = 2 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{2}{x^4}$

(c) $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ (d) $12x^{-3} = 12 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{12}{x^3}$

Ab 2014 wird in Österreich die standardisierte, kompetenzorientierte Reifeprüfung durchgeführt.

Diese neue Form der Matura, auf die bereits ab der 5. Klasse hingearbeitet wird, erfordert spezielle **Grundkompetenzen** und **vernetztes mathematisches Denken**, die mit diesem Buch perfekt erworben und trainiert werden können.

Mit **Mathematik positiv! 6** lernst du die **neuen Prüfungsformate** kennen – **wie Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Interpretieren, Argumentieren ...**

Du kannst dich
- auf sämtliche Schularbeiten der 6. Klasse vorbereiten,
- dich für jede Prüfung fit machen,
- viele Beispiele üben und selbst kontrollieren!

Der Stoff des ganzen Schuljahres wird ausführlich erklärt und anhand von vielen **übersichtlichen Musterbeispielen** verständlich gemacht. Den Abschluss jedes Kapitels bildet ein Mindmap, das eine Übersicht über den Inhalt gibt. Es hilft, die vorkommenden Begriffe mit dem dazugehörenden mathematischen Wissen zu verbinden und die Zusammenhänge herzustellen.

Alle Übungsbeispiele sind im **Lösungsband Mathematik positiv! 6** (ISBN 978-3-7074-1418-9) durchgerechnet und mit Anleitungen versehen. Das ermöglicht Lösungswege zu kontrollieren, aber auch Fehler zu finden.

Mit Mathematik positiv! 6
kannst du mathematisches Wissen erwerben, erweitern sowie vertiefen und Mathematik besser verstehen!

www.ggverlag.at

978-3-7074-1417-2

€ 26,80