AHS · MATHE-Facts

Begriffe – Definitionen – Nachschlagewerk

Kompetent AUFSTEIGEN …

Alle Grundkompetenzen auf einen Blick

Für die ÖSTERREICHISCHE MATURA

Die Theorie übersichtlich und kompakt erklärt

5.-8. Klasse Oberstufe

Dagmar Wurzer

G&G

AHS·MATHE-Facts

Begriffe – Definitionen – Nachschlagewerk

Kompetent AUFSTEIGEN ...

5.–8. Klasse Oberstufe

Dagmar Wurzer

G&G

Symbolerklärung

In einem solchen Kästchen findest du eine Information, um welche Grundkompetenz es sich handelt.

www.ggverlag.at

ISBN 978-3-7074-2247-4

In der aktuell gültigen Rechtschreibung

1. Auflage 2019
Satz: Dagmar Wurzer
Illustrationen Tiger: Elena Obermüller
Gesamtherstellung: Imprint, Ljubljana

© 2019 G&G Verlagsgesellschaft mbH, Wien
Alle Rechte vorbehalten. Jede Art der Vervielfältigung, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der fotomechanischen Wiedergabe sowie der Einspeicherung und Verarbeitung in elektronische Systeme, gesetzlich verboten. Aus Umweltschutzgründen wurde dieses Buch auf chlorfrei gebleichtem Papier gedruckt.

Inhaltsverzeichnis

Algebra und Geometrie (AG)

Grundbegriffe der Algebra

AG 1.1 Zahlenmengen 8
AG 1.2 Algebraische Grundbegriffe 9

(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme

AG 2.1 Terme und Formeln 10
AG 2.2 Lineare Gleichungen 11
AG 2.3 Quadratische Gleichungen 12
AG 2.4 Lineare Ungleichungen 13
AG 2.5 Lineare Gleichungssysteme 14

Vektoren

AG 3.1 und AG 3.2 Vektoren geometrisch deuten 15
AG 3.3 Rechnen mit Vektoren 16
AG 3.4 Geraden 17
AG 3.5 Normalvektoren 18

Trigonometrie

AG 4.1 Sinus, Cosinus und Tangens 19
AG 4.2 Sinus und Cosinus am Einheitskreis 20

Funktionale Abhängigkeiten (FA)

Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

FA 1.1 Definition einer Funktion 21
FA 1.2 Darstellung von Funktionen 22
FA 1.3 Tabellarische und grafische Darstellungen 23
FA 1.4 Wertepaare ermitteln 24
FA 1.5 Eigenschaften von Funktionen 25
FA 1.6 und FA 1.7 Schnittpunkte von Funktionsgraphen und mathematische Modelle 28
FA 1.8 und FA 1.9 Funktionen mit mehreren Veränderlichen und Überblick über die wichtigsten Funktionen 29

Lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$

FA 2.1 Lineare Funktionen erkennen 31
FA 2.2 Wertepaare und Parameter k und d ermitteln 32
FA 2.3 Wirkung von k und d 33
FA 2.4 Charakteristische Eigenschaften 34
FA 2.5 Beschreibung linearer Funktionen 35
FA 2.6 Direkte Proportionalität 36

Potenzfunktion

FA 3.1 Potenzfunktionen erkennen 37
FA 3.2 Wertepaare und Parameter a und b ermitteln 38
FA 3.3 Wirkung der Parameter a und b 39
FA 3.4 Indirekte Proportionalität 40

Polynomfunktion

FA 4.1 Definition von Polynomfunktionen 41
FA 4.2 und FA 4.3 Tabellen, Graphen und Gleichungen 42
FA 4.4 Grad der Polynomfunktion 43

Exponentialfunktion

FA 5.1 Exponentialfunktionen erkennen 44
FA 5.2 Wertepaare ermitteln 45
FA 5.3 Wirkung der Parameter a, b und e^{λ} 46
FA 5.4 Charakteristische Eigenschaften 47
FA 5.5 Halbwertszeit und Verdoppelungszeit 48
FA 5.6 Beschreibung mittels Exponentialfunktion 49

Sinusfunktion, Cosinusfunktion

FA 6.1 Darstellung der Sinusfunktion 50
FA 6.2 Wertepaare ermitteln 51
FA 6.3 Wirkung der Parameter a und b 52
FA 6.4, FA 6.5 und FA 6.6 Charakteristische Eigenschaften 53

Analysis (AN)

Änderungsmaße

AN 1.1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße 54
AN 1.2 Differenzen- und Differentialquotient 55

AN 1.3 Differenzen- und Differentialquotient im Kontext 56
AN 1.4 Differenzengleichungen 57

Regeln für das Differenzieren

AN 2.1 Regeln für das Differenzieren 58

Ableitungsfunktion und Stammfunktion

AN 3.1 und AN 3.2 Ableitungsfunktion und Stammfunktion 59
AN 3.3 Eigenschaften der Ableitungsfunktion 60

Summation und Integral

AN 4.1 Das bestimmte Integral 61
AN 4.2 Regeln des Integrierens 62
AN 4.3 Das bestimmte Integral im Kontext 63

Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)

Beschreibende Statistik

WS 1.1 Werte aus Darstellungen ermitteln 64
WS 1.2 Tabellen und Grafiken erstellen 65
WS 1.3 und WS 1.4 Statistische Kennzahlen und wichtige Eigenschaften.....66

Wahrscheinlichkeitsrechnung

WS 2.1 und WS 2.2 Grundbegriffe 69
WS 2.3 Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen 70
WS 2.4 Binomialkoeffizient 71

Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)

WS 3.1 Zufallsvariable, Erwartungswert, Standardabweichung 72
WS 3.2 Binomialverteilung 73
WS 3.3 Modellierung mit Binomialverteilung 74
WS 3.4 Normalapproximation der Binomialverteilung 75

Schließende/Beurteilende Statistik

WS 4.1 Konfidenzintervalle 76

Stichwortregister.....77

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Dieses leicht verständlich gehaltene Buch dient dir als Begleiter für die Mathematikschularbeiten der Oberstufe. Es soll dir aber auch dabei helfen, dich auf die Reifeprüfung vorzubereiten und diese sicher zu bestehen.
Für das praktische Arbeiten mit diesem Buch wurden alle mathematischen Grundkompetenzen jeweils kompakt auf einer Seite aufbereitet. Einfache Erklärungen und zahlreiche Darstellungen erleichtern das Verständnis der mathematischen Theorie.
Mit Hilfe des übersichtlichen Stichwortregisters ist ein schnelles Nachschlagen auf einzelne Grundkompetenzen möglich. Natürlich kannst du das Buch auch schrittweise durchgehen, um dir umfangreiches Wissen für die Matura anzueignen.

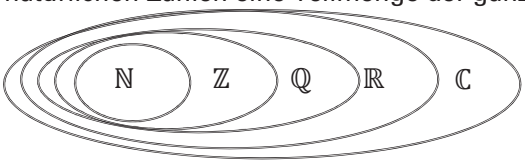
Viel Erfolg bei deinen Schularbeiten und der Reifeprüfung wünscht dir

Dagmar Wurzer

AG 1.1 Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können

Zahlenmengen

Die **Zahlenmengen** sind aufeinander aufbauend definiert. So ist die Menge der natürlichen Zahlen eine Teilmenge der ganzen Zahlen usw.



Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen werden folgendermaßen zusammengefasst:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

Ganze Zahlen

Die ganzen Zahlen enthalten die natürlichen Zahlen und ihre negativen Gegenzahlen:

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$

Rationale Zahlen

Rationale Zahlen geben das Verhältnis zweier ganzer Zahlen an. Zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gehören alle Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen, somit alle endlichen oder unendlich langen periodischen Dezimalzahlen.

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{z}{n} \middle| z, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ *Beispiele*: $-\frac{1}{2}$; $0{,}\dot{6}$; $-\frac{3}{4}$

Reelle Zahlen

Um die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu erhalten, werden die rationalen Zahlen um die irrationalen (= unendlich lange nicht periodische) Zahlen ergänzt. Zu den reellen Zahlen gehören somit alle Dezimalzahlen.

Beispiele: $-\frac{1}{2}$; $0{,}\dot{4}$; $\sqrt{2}$; π

Komplexe Zahlen

Die reellen Zahlen, ergänzt mit Wurzeln aus den negativen Zahlen, bilden die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ erlaubt die Ergänzung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen. *Beispiele:* $2 + 3i$; $\sqrt{-3}$ …

© Kompetent Aufsteigen – Mathe-Facts, G&G Verlag

AG 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

Algebraische Grundbegriffe

In der Algebra werden unten stehende **Grundbegriffe** häufig verwendet. Für eine exakte Fachsprache ist es von besonderer Bedeutung, die Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieser Begriffe benennen zu können.

Variable

Eine Variable ist eine veränderliche Größe, die verschiedene Werte annehmen kann. Jeder Buchstabe kann Platzhalter für eine unbekannte Zahl oder Größe sein.

Term

Ein Term ist ein sinnvoller Ausdruck, der Zahlen, Variable, Symbole für mathematische Verknüpfungen (+, –, · , : …) und Klammern enthalten kann.
Beispiele: $(3 + 7) \cdot 9$; $x + 4$; $8 - 6$; $\frac{a}{b}$; $\sqrt{y}$

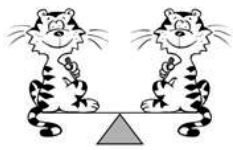
Formel

Eine Formel ist eine Gleichung, die ein gültiges Gesetz ausdrückt.

Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen

Eine Gleichung besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen in Verbindung gesetzt werden. Ein Gleichungssystem setzt sich aus mehreren Gleichungen zusammen. Von einer Ungleichung spricht man, wenn Terme durch ein Vergleichszeichen (<, >, ≤, ≥) verbunden sind.

Äquivalenz und Umformungen



Zwei Gleichungen sind äquivalent (= gleichwertig), wenn sie dieselbe Definitions- und Lösungsmenge haben. Äquivalenzumformungen ändern die Wertigkeit der Gleichung nicht. Die Waage bleibt im Gleichgewicht.

Lösbarkeit

Eine Gleichung ist lösbar, wenn es mindestens eine Zahl gibt, die man in die Gleichung einsetzen kann, um eine wahre Aussage zu erhalten.

© Kompetent Aufsteigen – Mathe-Facts, G&G Verlag

AG 2.1 Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können

Terme und Formeln

Terme und **Formeln** bestehen aus Variablen, die als Platzhalter für eine bestimmte Zahl, ein Zahlenpaar oder eine Zahlenmenge stehen können. Gesetzmäßigkeiten aus dem Alltag werden über Terme und Formeln in die Sprache der Mathematik übersetzt. Durch geschickte Äquivalenzumformungen sollen nun die Größen gefunden werden, für die die Variablen stehen. Das Ergebnis muss danach wieder im Kontext gedeutet werden.

Terme und Formeln aufstellen

Terme und Formeln sollen aus einer Textangabe aufgestellt werden.
Beispiel:

Die Herstellkosten K für ein Buch bestehen aus dem Grundpreis G und den Kosten, die von der Anzahl der Seiten a abhängt. Bei der Firma Fraclara-Druck beträgt der Grundpreis G = 10 € und der Preis pro Seite 15 Cent. Stelle eine Formel auf, die den Sachverhalt wiedergibt.
Lösung: $K = 10 + 0{,}15 \cdot a$

Terme und Formeln umformen

Um von einer Ausgangsformel zu einem richtigen Ergebnis zu kommen, sind folgende Äquivalenzumformungen erlaubt:

- Addition und Subtraktion eines Terms
- Multiplikation und Division eines Terms $\neq 0$

Beachte: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung.
Beispiel: Berechne die Seitenzahl des Buches, wenn die Herstellkosten in oben stehender Aufgabe K = 22 € betragen.

Lösung:

$$22 = 10 + 0{,}15 \cdot a \quad | -10 \text{ auf beiden Seiten}$$
$$12 = 0{,}15 \cdot a \quad | : 0{,}15 \text{ auf beiden Seiten}$$
$$80 = a$$

Ergebnis im Kontext deuten

Das Ergebnis einer Gleichung muss am Ende wieder mit dem außermathematischen Kontext in Verbindung gebracht werden. So lautet die korrekte Antwort zu obigem Beispiel: Das Buch hat 80 Seiten.

© Kompetent Aufsteigen – Mathe-Facts, G&G Verlag

AG 2.2 Lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können

Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen zeichnen sich dadurch aus, dass die Unbekannte nur in der ersten Potenz steht, d. h. es kommt kein Quadrat oder höhere Hochzahl vor. Lineare Gleichungen können auch als Funktionsgleichung einer linearen Funktion aufgefasst werden und als Gerade dargestellt werden. Typische lineare Gleichungen haben die folgende Formen:

$a \cdot x = b$ $\quad$ $a \cdot x + b \cdot y = c$ $\quad$ $y = k \cdot x + d$

Gleichungen aufstellen

Aus einer Beschreibung von Sachverhalten kann eine lineare Gleichung erstellt werden.

Beispiel:

Ein Schwimmbecken wird am Ende des Sommers ausgelassen, damit bei Minusgraden im Winter das Wasser das Becken nicht zerstört. Das Becken fasst 4 000 hl. Pro Stunde können 150 hl Wasser abgelassen werden.

Dieser Sachverhalt kann durch folgende Gleichung wiedergegeben werden:

$y = 4\,000 - 150 \cdot x$ $\quad$ y … Inhalt in hl; x … Stunden

Gleichungen umformen/lösen

Durch geeignete Äquivalenzumformungen (vgl. Abschnitt AG 1.2) kann die Gleichung so lange umgeformt werden, bis die geforderte Lösung direkt ablesbar ist.

Beispiel:

Es befinden sich nun noch 2 000 hl Wasser im Becken. Ermittle, wie lange bereits Wasser abgelassen wurde.

$2\,000 = 4\,000 - 150 \cdot x \quad | -4000$

$-2\,000 = -150 \cdot x \quad | : (-150)$

$x = 13\frac{1}{3}$

Gleichungen interpretieren und im Kontext deuten

Für die korrekte Antwort wird Angabe, Fragestellung und Ergebnis im Kontext gedeutet:

Es wurde bereits 13 Stunden und 20 Minuten Wasser aus dem Becken gelassen.

© Kompetent Aufsteigen – Mathe-Facts, G&G Verlag

AG 2.3 Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, die sich in der Form:
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ oder in normierter Form:
$x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ schreiben lassen. Quadratische Gleichungen können als quadratische Funktionen aufgefasst werden. Die grafische Darstellung entspricht einer Parabel. Die Nullstellen geben die Lösungen der Gleichungen an.

Quadratische Gleichungen lösen

Mit folgenden Lösungsformeln werden die Gleichungen $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ und $x^2 + p \cdot x + q = 0$ gelöst:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ oder $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

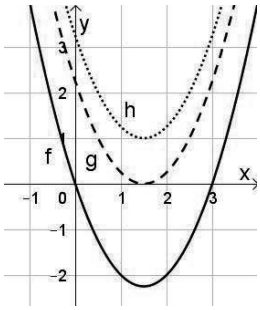
In die Lösungsformeln werden die Koeffizienten (a, b, c bzw. p, q) eingesetzt, um die Lösung zu erhalten.

Lösungen

Der Wert des Ausdrucks unter der Wurzel der Lösungsformeln ($b^2 - 4ac$ bzw. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$) heißt **Diskriminante D**. Er entscheidet, ob die Gleichung zwei, eine oder keine reelle Lösung hat.

Für $D > 0$ erhält man zwei reelle Lösungen.
Für $D = 0$ ergibt sich eine reelle Lösung.
Für $D < 0$ hat die Gleichung keine reelle Lösung.

Lösungsfälle geometrisch deuten



Die Gleichung $x^2 - 3 \cdot x = 0$ hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse ($x_1 = 0$, $x_2 = 3$). Das sind auch die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 3 \cdot x$.
Die Funktion $g(x) = x^2 - 3 \cdot x + 2{,}25$ hat eine Nullstelle bei $x_{1,2} = 1{,}5$.
Die quadratische Funktion $h(x) = x^2 - 3 \cdot x + 3{,}25$ hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse. Die dazugehörige quadratische Gleichung $x^2 - 3 \cdot x + 3{,}25 = 0$ hat somit keine Lösung in $\mathbb{R}$.

© Kompetent Aufsteigen – Mathe-Facts, G&G Verlag

AG 2.4 Lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können

Lineare Ungleichungen

Lineare Ungleichungen beinhalten statt des Gleichheitszeichens eines der folgenden Vergleichszeichen: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.
Ungleichungen können wie lineare Gleichungen durch Äquivalenzumformungen gelöst werden. Multipliziert oder dividiert man allerdings durch eine negative Zahl, dreht sich das Vergleichszeichen um.

Lineare Ungleichungen aufstellen

Lineare Ungleichungen eignen sich zum Vergleichen von zwei linearen Modellen.
Beispiel:
Marillen kosten im nahe gelegenen Kaufhaus 5,99 € pro kg. Beim Obstbauern in der Wachau hingegen nur 3,99 € pro kg. Die Fahrt in die Wachau kostet allerdings ca. 10 €. Ab wie viel kg rentiert sich die Fahrt in die Wachau?
Diesen Sachverhalt kann man mit Hilfe einer Ungleichung wiedergeben:
$5{,}99 \cdot x > 3{,}99 \cdot x + 10$

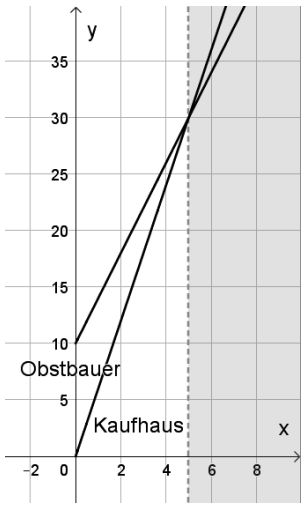
Lineare Ungleichungen lösen

Es dürfen bei linearen Ungleichungen dieselben Äquivalenzumformungen angewandt werden, wie beim Lösen von Gleichungen. Eine Multiplikation oder Division mit einem negativen Vorzeichen dreht das Vergleichszeichen um.

$5{,}99 \cdot x > 3{,}99 \cdot x + 10 \quad | - 3{,}99 \cdot x$
$2 \cdot x > 10 \quad | : 2$
$x > 5$

Interpretation und grafische Darstellung

Die alleinige numerische Lösung reicht nicht aus. Das Ergebnis muss im Kontext gedeutet werden. Ebenso kann der Sachverhalt grafisch dargestellt werden, indem man die linke und die rechte Seite der Ungleichung als lineare Funktion darstellt.
Die Lösung $x > 5$ zeigt, dass sich die Fahrt in die Wachau rentiert, wenn man mehr als 5 kg einkauft.



© Kompetent Aufsteigen – Mathe-Facts, G&G Verlag

AG 2.5 Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen sind Verbindungen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten zu einem gemeinsamen System. Die Gleichungen können auch als Gleichungen von linearen Funktionen aufgefasst werden. Allgemein kann dies folgendermaßen angeschrieben werden:

I: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$

II: $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$

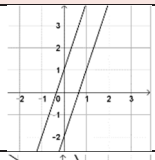
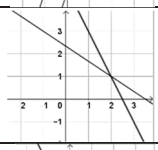
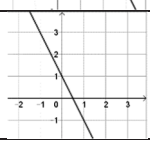
Lösen von Gleichungssystemen

Das am häufigsten zur Lösung von Gleichungssystemen angewandte Verfahren ist das Eliminationsverfahren. Durch geschicktes Multiplizieren der Gleichungen mit geeigneten Zahlen wird erreicht, dass beim Addieren der Gleichungen eine Variable eliminiert wird.

Beispiel:

I: $2 \cdot x + 3 \cdot y = 7$	$-2 \cdot$ I:	$-4 \cdot x - 6 \cdot y = -14$	in I: $2 \cdot x + 3 \cdot 1 = 7$
II: $4 \cdot x + 2 \cdot y = 10$	II:	$4 \cdot x + 2 \cdot y = 10$	$x = 2$
	$-2 \cdot$ I + II:	$-4 \cdot y = -4$	
		$y = 1$	$L = \{(2\|1)\}$

Lösungsfälle und grafische Interpretation

Lösungsfall	Schreibweise	Grafik
Keine Lösung: Die Geraden sind parallel.	$L = \{\ \}$	
Genau eine Lösung: Die Geraden schneiden sich.	$L = \{2\|1\}$	
Unendlich viele Lösungen: Die Geraden sind ident.	$L = \{ a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1\}$	

© Kompetent Aufsteigen – Mathe-Facts, G&G Verlag

Grundkompetenzen verstehen – Mathematik-Prüfungen bestehen!

Begriffe und Definitionen rasch nachschlagen – ganz einfach geht das mit

Kompetent AUFSTEIGEN

Mathe-Facts für die 5.–8. Klasse AHS:

- ✓ Kompakte Darstellung der Theorie der vier Inhaltsbereiche: Algebra und Geometrie (AG), Funktionale Abhängigkeiten (FA), Analysis (AN), Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)
- ✓ Formeln und Fakten zu jeder einzelnen mathematischen Grundkompetenz
- ✓ Klare Sprache, einfache Formulierungen, einleuchtende Erklärungen
- ✓ Zahlreiche Musterbeispiele, Grafiken und Abbildungen
- ✓ Übersichtliches Nachschlagewerk mit Stichwortverzeichnis
- ✓ Ideal zur Vorbereitung auf Prüfungen, Schularbeiten und die Zentralmatura
- ✓ Mit jedem Schulbuch kombinierbar

ISBN 978-3-7074-2247-4
€ 9,95
9 783707 422474

Infos und Musterseiten zu allen erschienenen Titeln unter
www.ggverlag.at