Wolfram Thorwartl • Günther Wagner • Helga Wagner

Mathematik positiv!

Neuausgabe für die Zentralmatura 2014

5. Klasse AHS

Österreichischer Lehrplan

G&G

Die Aufnahme in den Anhang zu den Schulbuchlisten für die 5. Klasse an allgemein bildenden höheren Schulen – Oberstufe im Unterrichtsgegenstand Mathematik wurde vom Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur mit BMUKK-5.001/0072-B/8/2012 vom 16. Juli 2012 empfohlen.

www.ggverlag.at

ISBN 978-3-7074-1412-7

Schulbuchnummer 160734

1. Auflage 2011, Nachdruck 2014 (1,01)

Printed by Litotipografia Alcione, Lavis-Trento, über Agentur Dalvit, D-85521 Ottobrunn

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Mathematik positiv 5 deckt den gesamten Lehrstoff der 5. Klasse ab und bereitet dich auf die standardisierte und kompetenzorientierte Reifeprüfung (Zentralmatura) vor.
Zu Beginn jedes Kapitels werden die Grundkompetenzen angegeben.
Diese beschreiben den grundlegenden und unverzichtbaren Bereich des Lehrplans.
Die Theorie dazu wird verständlich vorgeführt, wichtige Sätze, Definitionen und Formeln werden hervorgehoben. Durch eine Fülle von Beispielen werden die Grundkompetenzen und deren Anwendungen aufgezeigt und dadurch nachvollziehbar.
Die zusätzlichen Übungsaufgaben sind in einem Lösungsband vollständig durchgerechnet und geben dir die Möglichkeit, selbstständig zu üben.

Wenn du dich für die Schularbeit oder für eine Prüfung vorbereitest, empfehlen wird dir, zunächst den Theorieteil zu lernen und dann mit dem Üben zu beginnen. In einem eigenen Abschnitt gibt es Fragen zu diesem Kapitel. Zur Kontrolle sind im Lösungsband jene Seiten angegeben, auf denen du die Antworten findest.
In einem neuen Prüfungsformat (z. B. Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Argumentieren, Begründen) werden auch viele Beispiele angegeben, welche die Grundkompetenzen mit Blickrichtung auf die zentrale Reifeprüfung in Mathematik ab dem Haupttermin 2014 festigen.

Kontrolliere jedes deiner Beispiele mit dem Lösungsheft, richtig gerechnete Beispiele geben dir Sicherheit für die Prüfungssituation.
Am Ende jedes Kapitel gibt es ein Mindmap, das die wichtigen Begriffe und Zusammenhänge visualisiert. Jeden vorkommenden Ausdruck solltest du mit den zugehörigen Inhalten des Kapitels verbinden können. So kannst du nochmals überprüfen, ob du den Lehrstoff beherrschst.

Viel Erfolg und dadurch Freude an der Mathematik wünschen dir die Autoren.

INHALTSVERZEICHNIS

A. AUSSAGENLOGIK – MENGENALGEBRA

In diesem Kapitel lernst du Begriffe kennen, die du für mathematische Formulierungen und für die mathematische Symbolschreibweise brauchst. Sie werden immer wieder bei Definitionen, Begründungen und mathematischen Sätzen verwendet.

GRUNDKOMPETENZEN

Du wirst in diesem Kapitel
- ⇨ Begriffe wie Aussage, Aussageform, Mengen, Klasseneinteilung kennenlernen
- ⇨ Aussagen verknüpfen
- ⇨ Beziehungen zwischen Mengen herstellen
- ⇨ Mengen verknüpfen

1 Aussage – Aussageform

Aussage

Aussage

Ein (mathematischer) Satz, dem man eindeutig einen **Wahrheitswert** zuordnen kann, wird „**Aussage**“ genannt.

z. B.: $7 < 12$ w. A. (wahre Aussage)
Wien ist die Hauptstadt Frankreichs. f. A. (falsche Aussage)
Morgen wird es regnen. Keine Aussage. Man weiß nicht, ob es morgen regnen wird oder nicht. Man kann diesem Satz keinen Wahrheitswert (f. A. oder w. A.) zuordnen.

Aussageform

Aussageform

Ein mathematischer Satz mit einer oder mehreren Variablen (Platzhalter) wird „**Aussageform**“ genannt. Eine Aussageform hat keinen Wahrheitswert.

z. B.: $5 \mid x$ formale Aussageform
5 ist ein Teiler von x verbale Aussageform

Durch Belegen der **Variablen** mit Elementen der **Grundmenge G** wird die Aussageform zu einer Aussage. Die Elemente, die die Aussageform zu einer wahren Aussage überführen, heißen Lösungselemente. Wir fassen sie in einer **Lösungsmenge L** zusammen.

$5 \mid x \qquad G = \{10; 12; 15\}$

$5 \mid 10$ w. A.
$5 \mid 12$ f. A.
$5 \mid 15$ w. A. $\qquad L = \{10; 15\}$

Quantitative Aussagen

Quantitative Aussagen

Quantitative Aussagen geben an, für wie viele Elemente einer Grundmenge eine Aussageform zu einer wahren Aussage wird.

Wir unterscheiden:

(a) Allaussage: wahre Aussage **für alle Elemente** ($\forall$ … Allquantor) der Grundmenge

z. B.: Alle natürlichen geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.

$\forall x \in \mathbb{N}_g : 2 \mid x$ „für alle x aus $\mathbb{N}_g$ gilt: 2 teilt x“

Um eine Allaussage zu **widerlegen (falsifizieren)**, genügt ein Gegenbeispiel.

(b) Existenzaussagen:

(1) Wahre Aussage **für mindestens ein Element** ($\exists$ … Existenzquantor) der Grundmenge (allgemeine Existenzaussage)

z. B.: Es gibt (mindestens) eine natürliche Zahl, die kleiner 5 ist.

$\exists x \in \mathbb{N} : x < 5$ „es existiert ein x aus $\mathbb{N}$ für das gilt x < 5“

Das ist eine w. A., weil z. B.: 3 < 5 gilt.

Um die Richtigkeit dieser Existenzaussage **nachzuweisen (verifizieren)**, genügt ein Beispiel.

(2) Wahre Aussage **für genau ein Element** ($\exists!$) der Grundmenge (eindeutige Existenzaussage)

z. B.: Es gibt genau eine Primzahl, die durch 2 teilbar ist.

$\exists! x \in \mathbb{P}: 2 \mid x$ „es existiert genau ein x aus $\mathbb{P}$ für das gilt $2 \mid x$“

Das ist eine w. A., weil 2 die einzige gerade Primzahl ist.

(3) Wahre Aussage **für kein Element** ($\nexists$) der Grundmenge

z. B.: Es gibt keine natürliche Zahl, die kleiner 0 ist.

$\nexists x \in \mathbb{N} : x < 0$ „es existiert kein x aus $\mathbb{N}$ für das gilt x < 0“

Das ist eine w. A., weil alle natürlichen Zahlen $\geq$ 0 sind.

Negation einer Aussage

Negation

Das logische Gegenteil einer Aussage a nennt man Negation von a.

Man schreibt: $\neg a$ Sprich: „non a“ oder „nicht a“

z. B.: Aussage a: Das T-Shirt ist weiß.

Negation $\neg a$: Das T-Shirt ist nicht weiß.

Beachte: Das logische Gegenteil von weiß ist nicht „schwarz“, sondern „nicht weiß“.

Ist eine Aussage a wahr, dann ist die Negation $\neg a$ eine falsche Aussage und umgekehrt.
Die Negation von $\neg a$ hat denselben Wahrheitswert wie a.

Wir fassen in einer **Wahrheitstafel** zusammen

a	$\neg a$	$\neg(\neg a)$
w	f	w
f	w	f

Negation einer Allaussage

Aussage a: $\forall x \in \mathbb{N} : 2 \mid x$ f. A.

$\neg a$: $\neg(\forall x \in \mathbb{N} : 2 \mid x)$ w. A.

Nicht alle natürlichen Zahlen sind durch 2 teilbar, d.h. es existiert mindestens eine natürliche Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist.

$\neg a$: $\exists x \in \mathbb{N} : 2 \nmid x$ w. A.

Die Negation einer Allaussage ergibt eine Existenzaussage.

Negation einer allgemeinen Existenzaussage

Aussage a: $\exists x \in \mathbb{N}: 13 < x < 23$ mit x ist Primzahl w. A. z. B.: 17

$\neg a$: $\neg(\exists x \in \mathbb{N}: 13 < x < 23$ mit x ist Primzahl) f. A.

Es existieren keine natürlichen Zahlen zwischen 13 und 23, die Primzahlen sind, d.h. für alle natürlichen Zahlen zwischen 13 und 23 gilt, dass sie nicht Primzahlen sind.

$\neg a$: $\forall x \in \mathbb{N}: 12 < x < 23$ mit x ist nicht Primzahl f. A.

Die Negation einer allgemeinen Existenzaussage ergibt eine Allaussage.

2 Verknüpfung von Aussagen

Wenn 2 Aussagen miteinander verknüpft werden, erhält man eine neue Aussage. Zwischen den Teilaussagen muss kein logischer Zusammenhang bestehen.

Konjunktion

Konjunktion

Zwei oder mehrere Aussagen werden durch UND zu einer neuen Aussage verknüpft.

Man schreibt: $a \wedge b$ Sprich „a und b“ oder „a and b“

z. B.: Aussage a: 3 ist eine natürliche Zahl w. A.
Aussage b: 3 ist eine ungerade Zahl w. A.
Wir verknüpfen a und b zu einer neuen Aussage $a \wedge b$:
3 ist eine natürliche Zahl **und** 3 ist eine ungerade Zahl w. A.
Sowohl Aussage a **als auch** Aussage b sind richtig.

z. B.: Aussage a: 5 ist eine natürliche Zahl w. A.
Aussage b: 7 ist eine gerade Zahl f. A.
Wir verknüpfen a und b zu einer neuen Aussage $a \wedge b$:
5 ist eine natürliche Zahl **und** 7 ist eine gerade Zahl f. A.
Die Konjunktion $a \wedge b$ ergibt eine f. A.

Eine Aussage der Form $a \wedge b$ ist genau dann wahr, wenn die beiden Aussagen a, b wahr sind.

Ist mindestens eine der beiden Aussagen falsch, so ist auch $a \wedge b$ falsch.

Wir fassen in einer **Wahrheitstafel** zusammen

a	b	$a \wedge b$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion

Disjunktion

Zwei oder mehrere Aussagen werden durch ODER zu einer neuen Aussage verknüpft.

Man schreibt: $a \vee b$ Sprich „a oder b“ oder „a or b“

z. B.: Aussage a: 11 ist eine Primzahl w. A.
Aussage b: 5 ist eine gerade Zahl f. A.
Wir verknüpfen a und b zu einer neuen Aussage $a \vee b$:
11 ist eine Primzahl oder 5 ist eine gerade Zahl w. A.
Entweder Aussage a **oder** Aussage b **oder** beide sind richtig.

Eine Aussage der Form $a \vee b$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen a, b wahr ist. Sind beide Aussagen falsch, so ist auch $a \vee b$ falsch.

Wir fassen in einer **Wahrheitstafel** zusammen

a	b	$a \vee b$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Implikation

Implikation

Zwei Aussagen a und b werden durch WENN …, DANN … (bzw. AUS … FOLGT …) verknüpft.

Wenn a, dann b (a impliziert b: a imp b) bzw. aus a folgt b: $a \Rightarrow b$ ($\Rightarrow$ … Folgepfeil)

a heißt Voraussetzung, b Behauptung.

z. B.: Aussage a: x ist eine natürliche Zahl
Aussage b: $x \geq 0$
aus a folgt b: $a \Rightarrow b$ wenn $x \in \mathbb{N}$, dann ist $x \geq 0$

z. B.: Aussage a: ABCD ist ein Viereck
Aussage b: ABCD ist ein Rechteck
aus a folgt nicht b: Nicht jedes Viereck ist ein Rechteck.

Äquivalenz

Äquivalenz

Zwei Aussagen a und b werden durch … GENAU DANN, WENN … (bzw. AUS … FOLGT … UND UMGEKEHRT) verknüpft.

a genau dann, wenn b (a äquivalent b: a equ b)

bzw. aus a folgt b und umgekehrt: $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ d. h. $a \Leftrightarrow b$ ($\Leftrightarrow$ … Äquivalenzpfeil)

z. B.: Aussage a: 4 ist ein Teiler von 20
Aussage b: 20 ist ein Vielfaches von 4
aus a folgt b und umgekehrt: $a \Leftrightarrow b$

Übungsbeispiele

1 Welche der folgenden Gebilde sind Aussagen? Welchen Wahrheitswert besitzen diese Aussagen?

(a) Krems liegt an der Donau.
(b) Die Schallgeschwindigkeit ist größer als die Lichtgeschwindigkeit.
(c) Kufstein ist die Hauptstadt Tirols.
(d) Die Schweiz ist seit 1990 Mitglied der EU.
(e) $3x^2 + 4y^2 = 160$
(f) Wann wird es regnen?
(g) $12 - 6 = 5$
(h) 4% von 200 € sind 8 €.
(i) Ein Fünftel einer Stunde sind 20 Minuten.

2 Ersetze in folgenden Aussageformen die Variable durch Elemente der gegebenen Grundmenge G. Ermittle die Lösungsmenge L.

(a) x ist eine Stadt an der Donau. G = Menge der österreichischen Landeshauptstädte
(b) $x < 4$ $G = \mathbb{N}$
(c) $2x + x \leq x^2$ $G = \mathbb{N}$
(d) $x \mid 15$ $G = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
(e) $2 < x \leq 5$ $G = \mathbb{N}$
(f) $|x| < 5$ $G = \mathbb{Z}$
(g) $\frac{x-1}{2} = 2$ $G = \mathbb{N}$

3 Gib folgende verbale Aussageformen in formaler Form an und umgekehrt.

(a) Alle natürlichen Zahlen sind größer gleich 0.
(b) Es gibt mindestens eine natürliche Zahl, die durch 5 teilbar ist.
(c) Es gibt genau eine natürliche Zahl zwischen 20 und 22.
(d) Die Summe zweier natürlicher ungeraden Zahlen ist immer eine gerade natürliche Zahl.
(e) Es gibt keine ganze Zahl, deren Quadrat zwischen 17 und 21 liegt.
(f) $\exists x \in \mathbb{N} : 27 < \sqrt{x} < 40$
(g) $\forall x \in \mathbb{Z} : |x| \in \mathbb{N}$
(h) $\nexists x \in \mathbb{N} : \frac{1}{x} = 0$
(i) $\exists ! x \in \mathbb{Q} : \frac{1}{x} = 2$

4 Gib die Negation folgender Aussagen an!

(a) Jede natürliche Zahl ist durch 3 teilbar. f. A.
(b) $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 > x$ w. A.
(c) $\forall x \in \mathbb{N} : 3 \mid x$ f. A.
(d) $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 < 0$ f. A.
(e) $\exists x \in \mathbb{Q} : \frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}$ f. A.

5 Gib eine verbale Formulierung der Verknüpfung der Aussagen $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \Leftrightarrow b$ an und bestimme den Wahrheitswert!

(a) a: Der Mond ist ein Planet.
b: Der Mond ist unbewohnt.
(b) a: Linz liegt an der Donau.
b: Linz hat einen Donauhafen.
(c) a: ABC ist ein gleichseitiges Dreieck.
b: Die merkwürdigen Punkte fallen in einen Punkt zusammen.

3 Mengen – Mengenalgebra

Definition

Die Definition geht auf Georg CANTOR (1845–1918), den Begründer der Mengenlehre, zurück.

Menge

Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die Objekte in einer Menge werden **Elemente** genannt.

Wir schreiben $a \in M$ „a ist ein Element der Menge M“
$b \notin M$ „b ist kein Element der Menge M“

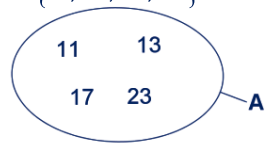
Mengen werden in der Regel mit Großbuchstaben, Elemente der Menge mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

Darstellen von Mengen

(a) durch Angabe der Elemente (**aufzählendes Verfahren**)

in einer Mengenklammer: $A = \{11; 13; 17; 23\}$

in einem Mengendiagramm (**VENN-Diagramm**):



Nur Mengen mit endlich vielen Elementen (endliche Mengen) können im aufzählenden Verfahren vollständig angegeben werden.
Unendliche Mengen, z. B.: $\mathbb{N}$, können ebenfalls im aufzählenden Verfahren angeben werden:
$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
Die Unendlichkeit der Menge wir durch 3 Punkte angedeutet.

(b) durch die mengenbildende Eigenschaft (**beschreibendes Verfahren**)
verbale Angabe: B ist die Menge aller durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen
formale Angabe: $B = \{ \underbrace{x \in \mathbb{N}}_{\text{Grundmenge}} \mid \underbrace{5 \mid x}_{\text{mengenbildende Eigenschaft}} \}$

$B = \{0; 5; 10; 15; 20; \ldots\}$

Mächtigkeit einer Menge

Mächtigkeit

Die Mächtigkeit einer endlichen Menge M gibt die Anzahl der Elemente dieser Menge an.

$A = \{7; 9; 14\}$ z(A) = 3 z(A) . . . Mächtigkeit der Menge A
$B = \{x; y; z\}$ z(B) = 3
A und B haben die gleiche Anzahl von Elementen, d. h. z(A) = z(B)
A und B sind gleich mächtig: $A \sim B$

Nach der Anzahl der Elemente unterscheiden wir:
(a) leere Menge: { }
(b) endliche Menge: Menge enthält endlich viele Elemente
(c) unendliche Menge: Menge enthält unendlich viele Elemente

4 Beziehungen zwischen Mengen

Gleichheit von Mengen

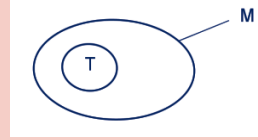
Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben, d. h. jedes Element von A ist auch Element von B und umgekehrt.

$A = B \Leftrightarrow \forall x : [(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$

Teilmenge

Eine Menge T ist Teilmenge einer Menge M, wenn jedes Element von T auch Element von M ist.

$T \subseteq M \Leftrightarrow \forall x : [(x \in T) \Rightarrow (x \in M)]$



M heißt Obermenge von T $(M \supseteq T)$

Beispiel: Bestimme alle Teilmengen der Menge $M = \{0; 1; 2\}$!

$T_1 = \{0\}$, $T_2 = \{1\}$, $T_3 = \{2\}$

$T_4 = \{0; 1\}$, $T_5 = \{0; 2\}$, $T_6 = \{1; 2\}$

$T_7 = \{0; 1; 2\}$ — Jede Menge ist auch Teilmenge von sich selbst. Jedes Element von T_7 ist auch Element von M.

$T_8 = \{\ \}$ — Es wird vereinbart, dass auch die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist.

Potenzmenge

Die Potenzmenge P(M) ist die Menge aller Teilmengen von M.

Die Mächtigkeit der Potenzmenge (das ist die Anzahl aller Teilmengen der Menge M) ist 2^n, wobei n die Anzahl der Elemente von M ist.

Beispiel: Gib die Potenzmenge bezüglich der Menge $M = \{0; 1; 2\}$ an!

$P(M) = \{\{\ \}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0; 1\}, \{0; 2\}, \{1; 2\}, \{0; 1; 2\}\}$

Übungsbeispiele

6 Gib die Mengen im formal beschreibenden und im aufzählenden Verfahren an!

(a) A ist die Menge der natürlichen Zahlen zwischen 3 und 11.

(b) B ist die Menge der ganzen Zahlen, die größer 7 sind.

(c) C ist die Menge der ganzen Zahlen, die kleiner 2 sind.

(d) D ist die Menge der durch 6 teilbaren Zahlen, die zwischen 15 und 41 liegen.

7 Gib die Mengen im formal beschreibenden Verfahren an!

(a) $E = \{7; 14; 21; 28; 35\}$

(b) $F = \{\ldots; -4; -3; -2\}$

(c) $G = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$

(d) $H = \{1; 3; 5; 7; \ldots 33; 35\}$

8 Überprüfe

(a) $\forall$ Mengen A,B: z(A) = z(B) $\Rightarrow$ A = B

(b) $\forall$ Mengen A,B: A = B $\Rightarrow$ z(A) = z(B)

9 Setze eines der Zeichen $\subseteq, \supseteq, =$ ein, sodass eine wahre Aussage entsteht!

(a) $A = \{4; 5; 6\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ — A ____ B, B ____ A

(b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 12\}$, $B = \mathbb{N}$ — A ____ B, B ____ A

(c) $A = \mathbb{N}$, B = Menge der nicht negativen ganzen Zahlen — A ____ B, B ____ A

10 Gib die Potenzmenge bezüglich der Menge $M = \{r, s\}$ an!

11 Gib die Mächtigkeit der Potenzmengen bezüglich der gegebenen Mengen an!

(a) $A = \{24; 25; 26; 27; 28\}$

(b) $B = \{u; v; x; y\}$

(c) C = Menge der österreichischen Bundesländer

(d) $D = \{\ \}$

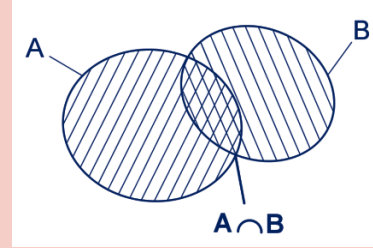
5 Verknüpfung von Mengen

Durchschnittsmenge

Durchschnittsmenge

Die Durchschnittsmenge zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die Elemente von A **und** Elemente von B sind.

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$



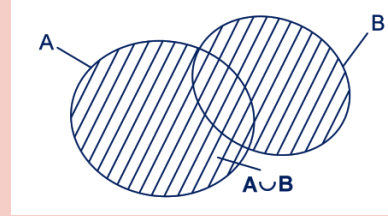
Anmerkung:
Haben zwei Mengen A und B keine gemeinsamen Elemente, dann ist die Durchschnittsmenge die leere Menge. A und B nennt man in diesem Fall **disjunkte Mengen**.

Vereinigungsmenge

Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die Elemente von A **oder** Elemente von B sind.

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$



Beachte: Grundsätzlich gibt es keinen Unterschied, ob man Mengen oder die entsprechenden mengenbildenden Eigenschaften, die Aussagen bedeuten, verknüpft.
Der Durchschnitt von Mengen $A \cap B$ entspricht der Konjunktion von Aussagen $a \wedge b$.
Die Vereinigung von Mengen $A \cup B$ entspricht der Disjunktion von Aussagen $a \vee b$.

Beispiel: Gegeben sind die Mengen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \le x < 15\}$ und $B = \{x \in \mathbb{N}_g \mid x \le 12\}$

Bilde die Durchschnitts- und die Vereinigungsmenge!

$$A = \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$$
$$B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$$

Elemente, die in A **und** B liegen, bilden den Durchschnitt.

$$A \cap B = \{8; 10; 12\}$$

Elemente, die in A **oder** B liegen, bilden die Vereinigung.

$$A \cup B = \{0; 2; 4; 6; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$$

Übungsbeispiele

12 Bilde die Durchschnittsmenge und die Vereinigungsmenge von A und B!
(a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \le x < 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 12\}$ (b) $A = \mathbb{N}_g$, $B = \mathbb{N}_u$

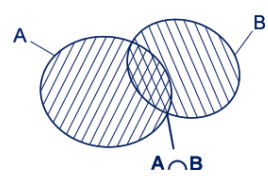
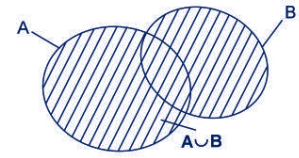
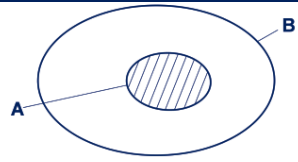
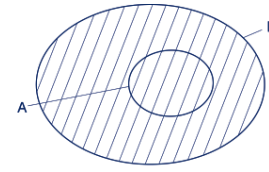
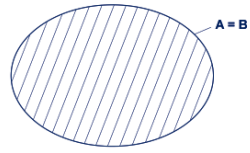
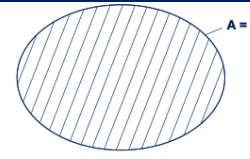
13 Gegeben sind die Mengen $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \le x \le 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \le x < 7\}$
Bestimme (a) $(A \cup B) \cap C$ (b) $A \cap (B \cup C)$

14 In einer Kleinstadt gibt es 2 135 Haushalte. In 1 775 Haushalten gibt es mindestens ein Handy, in 1 205 Haushalten einen Festnetzanschluss. 890 Haushalte haben sowohl mindestens ein Handy und einen Festnetzanschluss.

(a) Wie viele Haushalte besitzen mindestens ein Handy, aber keinen Festnetzanschluss?
(b) Wie viele Haushalte besitzen einen Festnetzanschluss, aber nicht mindestens ein Handy?
(c) Wie viele Haushalte besitzen weder mindestens ein Handy noch einen Festnetzanschluss?

15 In einer Klasse mit 27 Schülern fahren 23 Ski, 9 gehen Eislaufen, 5 gehen Eisstockschießen. 7 Schüler gehen Skifahren und Eislaufen, 2 gehen Eislaufen und Eisstockschießen, 1 geht Skifahren und Eisstockschießen, keiner betreibt alle drei Sportarten. Wie viele Schüler betreiben nur eine Sportart?

Eigenschaften und Gesetze für Durchschnitt und Vereinigung

Eigenschaften	*Durchschnitt von Mengen*	*Vereinigung von Mengen*
$A \neq B$	$A \cap B \subseteq A$ $A \cap B \subseteq B$ 	$A \cup B \supseteq A$ $A \cup B \supseteq B$ 
$A \subseteq B$	$A \cap B = A$ 	$A \cup B = B$ 
$A = B$ Idempotenz-gesetz	$A \cap A = A$ 	$A \cup A = A$ 
$A = \{\ \}, B = \{\ \}$	$\{\ \} \cap \{\ \} = \{\ \}$	$\{\ \} \cup \{\ \} = \{\ \}$
$B = \{\ \}$	$A \cap \{\ \} = \{\ \}$	$A \cup \{\ \} = A$

Gesetze	*Durchschnitt von Mengen*	*Vereinigung von Mengen*	
KG	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	Kommutativgesetz
AG	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Assoziativgesetz
DG	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		Distributivgesetz des Durchschnitts bezüglich der Vereinigung
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		Distributivgesetz der Vereinigung bezüglich des Durchschnitts
	$A \cap \{A \cup B\} = A$		Verschmelzungs-gesetze
	$A \cup \{A \cap B\} = A$		

Die Gesetze der Mengenalgebra können mit Hilfe von Zugehörigkeitstafeln bewiesen werden. In der Zugehörigkeitstafel gibt man alle Fälle an, die für ein Element bezüglich der gegebenen Mengen zutreffen können. Bei zwei Mengen ergeben sich vier Möglichkeiten, bei drei Mengen acht Möglichkeiten. Für jede Möglichkeit werden die vorkommenden Verknüpfungen getrennt angeschrieben. Stimmt die linke mit der rechten Seite überein, so ist das Gesetz bewiesen.

Beispiel: Beweise das KG des Durchschnitts $A \cap B = B \cap A$!

A	B	$A \cap B$	$B \cap A$	
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$(x \in A) \wedge (x \in B) \Rightarrow (x \in A \cap B)$ aber auch $(x \in B \cap A)$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$(x \in A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow (x \notin A \cap B)$ aber auch $(x \notin B \cap A)$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$(x \notin A) \wedge (x \in B) \Rightarrow (x \notin A \cap B)$ aber auch $(x \notin B \cap A)$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$(x \notin A) \wedge (x \notin B) \Rightarrow (x \notin A \cap B)$ aber auch $(x \notin B \cap A)$
		L.S.	R.S.	w. A. Das Gesetz gilt!

Beispiel: Beweise das DG der Vereinigung bezüglich des Durchschnitts
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$!

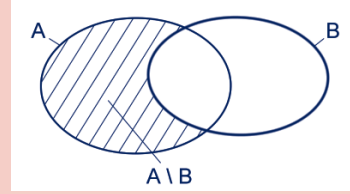
A	B	C	A	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
					L.S.			R.S.

Differenzmenge

Das Bilden der Differenzmenge brauchst du z. B. beim Aufstellen der Definitionsmenge von Bruchtermen bzw. rationalen Funktionen.

Differenzmenge
Die Differenzmenge zweier Mengen A und B enthält jene Elemente, die zu A, aber nicht zu B gehören.

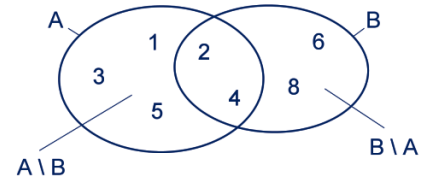
$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$



z. B.: $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$

$A \setminus B = \{1; \underline{2}; 3; \underline{4}; 5\} \setminus \{\underline{2}, \underline{4}; 6; 8\} = \{1; 3; 5\}$

$B \setminus A = \{\underline{2}; \underline{4}; 6; 8\} \setminus \{1; \underline{2}; 3; \underline{4}; 5\} = \{6; 8\}$



Anmerkung:

(1) Das Bilden der Differenzmenge ist nicht kommutativ.
(2) Das Bilden der Differenzmenge ist nicht assoziativ.
(3) $A \setminus B \subseteq A$, $B \setminus A \subseteq B$
(4) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \{\ \}$

Beispiel: Beweise mit Hilfe einer Zugehörigkeitstafel $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$!

A	B	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	$A \cup B$	$A \cap B$	$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
				L.S.			R.S.

L.S. = R.S. w. A. Das Gesetz gilt!

Komplementärmenge

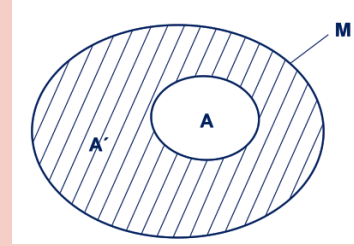
Komplementärmenge

Ist A eine Teilmenge der Menge M, so besteht die Komplementärmenge A´ (das Kompliment von A) aus allen Elementen von M, die nicht Elemente von A sind.

$A \subseteq M,\ A' = \{x \mid (x \in M) \wedge (x \notin A)\}$

$A \subseteq M,\ A' = M \setminus A$ bzw. $A = M \setminus A'$

$A' \cup A = M \quad A' \cap A = \{\ \}$



Beispiel: Beweise mit Hilfe von Zugehörigkeitstafeln die **Gesetze von DE MORGAN!**

Dabei gilt $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	A'	B'	$A' \cap B'$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
			L.S.			R.S.

w. A. Das Gesetz gilt!

(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

A	B	$A \cap B$	$(A \cap B)'$	A'	B'	$A' \cup B'$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
			L.S.			R.S.

w. A. Das Gesetz gilt!

Produktmenge

Produktmengen brauchst du z. B. als Grundmenge bzw. Lösungsmenge beim Lösen von Gleichungssystemen.

Produktmenge
Die Produktmenge zweier Mengen A und B ist die Menge aller Paare (a; b), deren erste Komponente a Element der Menge A und deren zweite Komponente b Element der Menge B ist.

$$A \times B = \{(a; b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

z. B.: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{x; y\}$

$$A \times B = \{(1; x), (1; y), (2; x), (2; y), (3; x), (3; y)\}$$

Für die Mächtigkeit gilt: $z(A \times B) = z(A) \cdot z(B)$

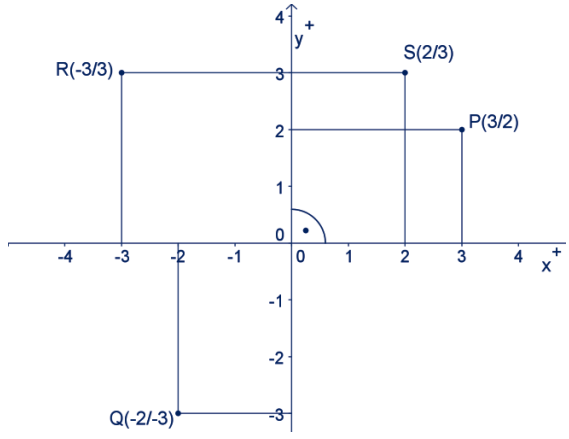
z. B.: $z(A) = 3$, $z(B) = 2 \Rightarrow z(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6$

In der Produktmenge liegen 6 Zahlenpaare.

Anmerkung:
Das Paar (a; b) heißt **geordnetes Paar**, da die Reihenfolge der Komponenten festgelegt ist.

z. B.: $(2; 3) \neq (3; 2)$

Geordnete Paare reeller Zahlen können auch als Punkte in einem **kartesischen (rechtwinkligen) Koordinatensystem** dargestellt werden:



waagrechte Achse: **x-Achse (Abszissenachse)**
senkrechte Achse: **y-Achse (Ordinatenachse)**

0 … **Ursprung**
01 … **Einheitsstrecke**

Ab 2014 wird in Österreich die standardisierte, kompetenzorientierte Reifeprüfung durchgeführt.

Diese neue Form der Matura, auf die bereits ab der 5. Klasse hingearbeitet wird, erfordert spezielle **Grundkompetenzen** und **vernetztes mathematisches Denken**, die mit diesem Buch perfekt erworben und trainiert werden können.

Mit Mathematik positiv! 5 lernst du die **neuen Prüfungsformate** kennen – **wie Multiple-Choice-Verfahren, Aussagen richtigstellen, Interpretieren, Argumentieren ...**

Du kannst dich
- auf sämtliche Schularbeiten der 5. Klasse vorbereiten,
- dich für jede Prüfung fit machen,
- viele Beispiele üben und selbst kontrollieren!

Der Stoff des ganzen Schuljahres wird ausführlich erklärt und anhand von vielen **übersichtlichen Musterbeispielen** verständlich gemacht. Den Abschluss jedes Kapitels bildet ein Mindmap, das eine Übersicht über den Inhalt gibt. Es hilft, die vorkommenden Begriffe mit dem dazugehörenden mathematischen Wissen zu verbinden und die Zusammenhänge herzustellen.

Alle Übungsbeispiele sind im **Lösungsband Mathematik positiv! 5** (ISBN 978-3-7074-1413-4) durchgerechnet und mit Anleitungen versehen. Das ermöglicht Lösungswege zu kontrollieren, aber auch Fehler zu finden.

Mit Mathematik positiv! 5
kannst du mathematisches Wissen erwerben, erweitern sowie vertiefen und Mathematik besser verstehen!

www.ggverlag.at

Schulbuchnummer 160734

978-3-7074-1412-7

€ 26,80